This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

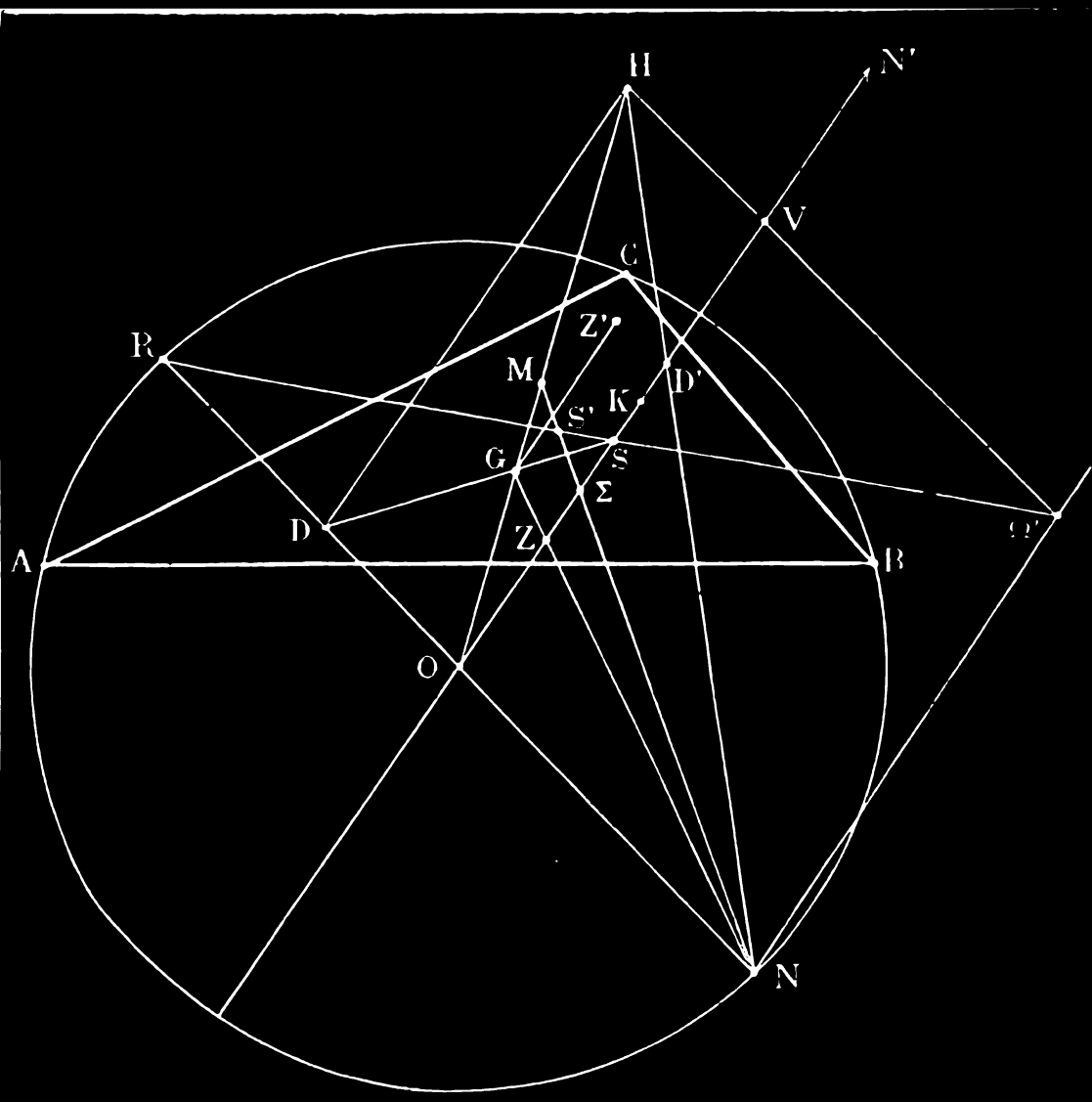
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Mathesis

Digitized by Google

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Class

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

Digitized by Google

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques.

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique.

Bourget, M. E. (ou M. S.). Journal de Mathématiques de BOURGET, Mathématiques élémentaires (ou Mathématiques spéciales).

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE, continué d'abord par BORCHARDT, puis par KRONACKER et WEIERSTRASS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences Professeur à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

TOME SEPTIÈME

ANNÉE 1887.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
49, RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1887

Digitized by Google

GA1
P:34
v.7

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

MATHESIS

PROPRIÉTÉS DE LA COURBE D'AGNESI (*);

par M. J. Mister, professeur à l'Université de Gand.

I. L'équation de la courbe d'Agnesi est

$$y = a\sqrt{\frac{x}{a-x}}; \tag{1}$$

l'équation de la cissoïde est

$$y_1 = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}, \tag{2}$$

et celle du cercle est

$$Y = (a-x)\sqrt{\frac{x}{a-x}}. \tag{3}$$

Il en résulte

$$y = y_1 + Y.$$

L'ordonnée de la courbe d'Agnesi est donc la somme des ordonnées du cercle et de la cissoïde, ce qui fournit un moyen facile de tracer la courbe.

Corollaire. On conclut de là que l'aire comprise entre les deux cubiques est égale à l'aire du cercle, et que le volume engendré par la courbe d'Agnesi, tournant autour de son asymptote, surpasse le volume engendré par la cissoïde tournant autour de la même droite d'une quantité égale au volume de tore fermé engendré par le cercle tournant autour de sa tangente.

II. Théorème. *Le volume engendré par la courbe d'Agnesi*

$$y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$$

tournant autour de son asymptote, est double du volume du tore fermé engendré par le cercle

$$Y^2 = x(a-x)$$

(*) Voir aussi, sur cette courbe, *Bourget*, M. S., 1885, 154 et 200, 1886, 226.

106249

Digitized by Google

tournant autour de sa tangente. En effet, on a

$$xy = aY, \quad y = \frac{a}{x}Y \tag{1}$$

et

$$y - Y = \left(\frac{a-x}{x}\right)Y. \tag{2}$$

On tire de là

$$2\pi x(y - Y)dx = 2\pi(a - x).\ Ydx. \tag{3}$$

Les volumes engendrés par les rectangles élémentaires $(y - Y)\,dx$ et Ydx tournant respectivement autour des tangentes aux extrémités du diamètre horizontal sont donc égaux; par conséquent, le volume engendré par l'aire comprise entre les deux courbes est égal au volume du tore.

SUR LES POINTS COMPLÉMENTAIRES;

par M. Ém. Vigarié, élève de l'École des Mines (Paris).

I. Propriétés générales.

1. Soit dans le plan du triangle *fondamental* ABC, un point M ayant pour coordonnées *normales* α, β, γ(*). Si l'on prend un point M_1 dont les coordonnées α_1, β_1, γ_1 sont définies par les relations

$$\frac{\alpha_1}{\beta+\gamma} = \frac{\beta_1}{\gamma+\alpha} = \frac{\gamma_1}{\alpha+\beta},$$

M_1 sera, d'après M. E. Hain (*Ueber complementäre Punkte, Archives de Grunert-Hoppe* (2) III, 1885, pp. 214-217) le *point complémentaire* de M_1 et M sera le *point anticomplémentaire* de M_1. On a évidemment

$$\frac{\alpha}{-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} = \frac{\beta}{\alpha_1-\beta_1+\gamma_1} = \frac{\gamma}{\alpha_1+\beta_1-\gamma_1}.$$

Nous étendrons, avec M. de Longchamps, ces définitions à un système quelconque de coordonnées.

(*) Les coordonnées normales d'un point sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du triangle de référence.

Digitized by Google

2. Les points qui coïncident avec leurs complémentaires, vérifient les équations

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta},$$

ou

$$\alpha(\gamma+\alpha)-\beta(\beta+\gamma)=0,\quad \alpha(\alpha+\beta)-\gamma(\beta+\gamma)=0,$$

qui admettent les deux solutions : $1^\circ\ \alpha=\beta=\gamma$; $2^\circ\ \alpha+\beta+\gamma=0$. La première solution correspond à un point déterminé L, la seconde à une droite déterminée l, laquelle est harmoniquement associée à L(*). L *est donc son propre complémentaire;* de même, *tout point de l coïncide avec son complémentaire.*

Deux points complémentaires M, M_1 *sont en ligne droite avec le point* L; car les coordonnées de L sont de la forme $n\alpha+n_1\alpha_1$, $n\beta+n_1\beta_1$, $n\gamma+n_1\gamma_1$, où l'on fait $n=n_1=1$.

Le rapport anharmonique de deux points complémentaires M, M_1, *du point* L *et de l'intersection m des droites l et* M_1M *est constant et égal à* -2. En effet, le rapport anharmonique (MM_1Lm) des points

$$M(\alpha,\beta,\gamma),\quad M_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),\quad L(n\alpha+n_1\alpha_1,\ldots),\quad m(p\alpha+p_1\alpha_1,\ldots)$$

est

$$\frac{LM}{LM_1}:\frac{mM}{mM_1}=\frac{n_1}{n}:\frac{p_1}{p}.$$

En substituant les quantités $(p\alpha+p_1\alpha_1,\ldots)$ dans l'équation de l, on trouve $\frac{p_1}{p}=-\frac{1}{2}$, et comme $\frac{n_1}{n}=1$, on a

$$\frac{LM}{LM_1}:\frac{mM}{mM_1}=\frac{ML}{Mm}:\frac{M_1L}{M_1m}=-2.$$

Appelons *figures complémentaires* deux figures F, F_1 telles, que les points de F_1 sont les complémentaires des points de F. Comme deux points homologues de F et F_1 sont alignés avec L et que doux droites

---

(*) Les conjuguées harmoniques des droites AL, BL, CL par rapport aux angles A, B, C du triangle de référence rencontrent les côtés BC, CA, AB en trois points situés sur une même droite l, que M. de Longchamps dit *harmoniquement associés au point* L. M. Mathieu (N. A. M. (2) IV, 1865) avait proposé la dénomination de *polaire trilinéaire.*

Digitized by Google

homologues concourent sur l(*), les figures complémentaires sont homologiques : L en est le centre d'homologie et l l'axe d'homologie. Un premier couple de points homologues est constitué par A et le point de rencontre A_1 de BC avec AL. Pour obtenir le complémentaire M_1 d'un point donné M, on mène la droite AM, et on joint à A_1 le point de rencontre de l avec AM; cette dernière droite coupera LM au point cherché M_1.

3. Soient

$$M,\quad M_1,\quad M_2,\quad \ldots,\quad M_n,\quad M_{n+1},\quad \ldots.$$

une suite de points dont chacun a pour complémentaire celui qui le suit. Les coordonnées de ces points seront

M . . .	α,	β,	γ,
M_1 . . .	$\beta+\gamma$,	$\gamma+\alpha$,	$\alpha+\beta$,
M_2 . . .	$2\alpha+\beta+\gamma$,	$2\beta+\gamma+\alpha$,	$2\gamma+\alpha+\beta$,
M_3 . . .	$2\alpha+3(\beta+\gamma)$,	$2\beta+3(\gamma+\alpha)$,	$2\gamma+3(\alpha+\beta)$,
M_4 . . .	$6\alpha+5(\beta+\gamma)$,	$6\beta+5(\gamma+\alpha)$,	$6\gamma+5(\alpha+\beta)$,
. . . . .			

Posons, pour les coordonnées de M_n :

$$\alpha_n=C_n\alpha+C'_n(\beta+\gamma),\quad \beta_n=C_n\beta+C'_n(\gamma+\alpha),\quad \gamma_n=C_n\gamma+C'_n(\alpha+\beta),$$

nous aurons

$$\alpha_{n+1}=\beta_n+\gamma_n=2C'_n\alpha+(C_n+C'_n)(\beta+\gamma),$$

de sorte que

$$C_{n+1}=2C'_n,\quad C'_{n+1}=C_n+C'_n, \tag{1}$$

avec les valeurs initiales $C_0=1$, $C'_0=0$.

Des formules (1), on déduit

$$C_{n+1}-C'_{n+1}=-(C_n-C'_n)=(-1)^{n+1}, \tag{2}$$

$$\frac{C_{n+1}}{C'_{n+1}}=\frac{2}{1+\dfrac{C_n}{C'_n}}. \tag{3}$$

(*) C'est ce qui résulte de l'invariabilité du rapport anharmonique $(MM_1L\infty)$ ou aussi des équations des droites homologues, lesquelles sont de la forme

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=0,\quad A(\beta+\gamma)+B(\gamma+\alpha)+C(\alpha+\beta)=0,$$

et donnent par addition $(A+B+C)(\alpha+\beta+\gamma)=0$. Ces droites coïncident, lorsque $A+B+C=0$; alors elles passent par L. Si cela n'a pas lieu, elles se coupent sur la droite l représentée par $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Digitized by Google

L'égalité (3) conduit immédiatement aux valeurs des coefficients C et C'. On trouve

$$\frac{C}{C'} = \frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{10}{11}, \frac{22}{21}, \frac{42}{43}, \frac{86}{85}, \ldots$$

Comme le rapport $\frac{C_n}{C'_n}$ tend vers l'unité, les points M, M_1, M_2, ... oscillent autour de L en tendant indéfiniment vers ce point.

4. Dans le système des coordonnées normales, le centre d'homologie de deux figures complémentaires est le centre du cercle inscrit, et l'axe d'homologie passe par les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC(*).

Dans la suite de ces études, nous ne considérerons que les figures complémentaires correspondant aux coordonnées barycentriques. Ces figures sont homothétiques; le centre d'homothétie est le centre de gravité G de ABC et le rapport d'homothétie est égal à — 2. Le complémentaire M_1 d'un point M s'obtient en prolongeant la droite MG de $GM_1 = \frac{1}{2}MG$; pour construire l'anticomplémentaire M'_1 de M, on prolonge MG de $GM'_1 = 2MG$.

Les complémentaires des sommets du triangle ABC sont les milieux A_1, B_1, C_1 des côtés opposés, et leurs anticomplémentaires sont les sommets du triangle $A'_1B'_1C'_1$ obtenu en menant par A, B, C des parallèles aux côtés opposés; $A_1B_1C_1$ est le *triangle complémentaire*, $A'_1B'_1C'_1$ est le *triangle anticomplémentaire*.

Soient A_2, B_2, C_2 les milieux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$ ceux des côtés de $A_2B_2C_2$, etc. Soient de même $A'_2B'_2C'_2$ le triangle formé par les parallèles aux côtés de ABC menées par A'_1, B'_1, C'_1; $A'_3B'_3C'_3$ le triangle ayant pour côtés les parallèles menées à BC, CA, AB par les points A'_2, B'_2, C'_2, etc. Nous dirons que $A_2B_2C_2$ est le *deuxième triangle complémentaire*, $A'_2B'_2C'_2$ le *deuxième triangle anticomplémentaire*, et ainsi de suite. Ces différents triangles peuvent être désignés par T, T_1, T_2, ...,

---

(*) Nous avons proposé pour les complémentaires dans le système des coordonnées normales la dénomination de *points supplémentaires*. Le triangle supplémentaire de ABC a pour sommets les pieds des bissectrices intérieures; le triangle anti supplémentaire de ABC a pour sommets les centres des cercles exinscrits. Voir *Journal des Bourget, Math. El.*, 1886, p. 276. (J. N.)

Digitized by Google

T'_1, T'_2, T'_3, ... M et ses points complémentaires M_1, M_2, ... des différents ordres sont des points homologues par rapport aux triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ...; ils sont en ligne droite avec G, et l'on a

$$GM_1 = \tfrac{1}{2}MG, \quad GM_2 = \tfrac{1}{2}MG_1 = \tfrac{1}{4}MG, \quad ....$$

Semblablement M et ses anticomplémentaires des différents ordres, M'_1, M'_2, ... sont des points homologues par rapport aux triangles ABC, $A'_1B'_1C'_1$, $A'_2B'_2C'_2$, ... Observons aussi que M_n et M_{n+1} sont des points homologues par rapport à T_p, T_{p+1} ou T'_{q-1} et T'_q.

Les points M_1, M_2, ..., ou M'_1, M'_2, ... ont les mêmes coordonnées que M, pourvu que l'on adopte pour triangle de référence le triangle complémentaire ou anticomplémentaire du même ordre.

5. La construction la plus simple du complémentaire ou anticomplémentaire d'un point donné M se déduit des relations $GM_1 = \frac{1}{2}MG$, $GM'_1 = 2MG$.

On peut aussi mener par A_1, B_1, C_1 des parallèles aux droites AM, BM, CM ou par A, B, C des parallèles à A_1M, A_2M, A_3M; les trois premières parallèles se coupent au complémentaire M_1, les trois autres à l'anticomplémentaire M'_1.

Les remarques suivantes sont souvent utiles.

Supposons que les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés de ABC aux points μ_a, μ_b, μ_c, et les côtés de $A_1B_1C_1$ en ν_a, ν_b, ν_c; soient aussi π_a, π_b, π_c les symétriques de μ_a, μ_b, μ_c par rapport à A_1, B_1, C_1. On sait que les droites $A\pi_a$, $B\pi_b$, $C\pi_c$ se rencontrent en un point P appelé *point réciproque* ou *conjugué isotomique* de M. Or, les lignes $A_1\nu_a$, $B_1\nu_b$, $C_1\nu_c$ sont parallèles à $A\pi_a$, $B\pi_b$, $C\pi_c$; donc elles se coupent en un point N, qui est le complémentaire de P.

D'après cela, *les droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle aux milieux des droites allant des sommets aux côtés opposés et se croisant en un même point* M, *passent par un même point qui est le complémentaire du réciproque de* M.

Considérant $A_1B_1C_1$ comme étant le triangle fondamental, on tire, du théorème qui précède, la construction suivante de l'anticomplémentaire P d'un point donné N :

Les droites joignant les sommets d'un triangle $A_1B_1C_1$ *à un même point* N *rencontrent les côtés opposés en trois points* ν_a, ν_b, ν_c; *si par les symétriques de ces points relativement aux milieux* A_2, B_2, C_2 *des côtés, on mène*

Digitized by Google

des parallèles à A_1N, A_2N, A_3N, *ces nouvelles droites concourent à l'anti-complémentaire de* N (LEMOINE, *J. de Bourget, Math. El.*, 1883, p. 222).

6. Les points complémentaires barycentriques ont été rencontrés par plusieurs auteurs, notamment par Nagel(*); nous citons les exemples suivants :

1° L'orthocentre H de ABC a pour complémentaire le centre O du cercle circonscrit; O a pour complémentaire le centre O_9 du cercle des neuf points (EULER, *Mémoires de Pétersbourg*, t. XI, 1765).

2° Le centre d'homologie D du triangle ABC et du premier triangle de Brocard a pour complémentaire le milieu S de la distance des points de Brocard (H. BROCARD, *Congrès de l'Ass fr.*, *Alger* 1881, *Rouen* 1883, *Zeitschrift de Hoffmann-Lieber*, t. XIII, pp. 33 et 207).

3° Le centre du cercle inscrit à ABC a pour complémentaire le centre du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$, point qui est le centre de gravité du périmètre du triangle ABC; il a pour anticomplémentaire le centre du cercle inscrit au triangle $A'_1B'_1C'_1$, point que nous étudierons plus loin sous le nom de *point de Nagel* de ABC.

4° Le point de Lemoine, de ABC, a pour anticomplémentaire un point étudié récemment par M. Brocard, qui l'a désigné par la lettre Λ. Nous consacrons également un chapitre spécial à ce point.

5° M G. de Longchamps a rencontré des points complémentaires dans son mémoire *Sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie.* (*Annales de l'Éc. norm. sup.*, t. III, 1866, p. 320 et suivantes). Voici deux propositions empruntées à ce mémoire et énoncées avec la nouvelle terminologie :

a) La transversale réciproque est parallèle à la droite qui joint les points milieux des diagonales du quadrilatère complet que forme la transversale proposée avec le triangle. Les points milieux sont les anti-complémentaires des points où la transversale réciproque coupe les côtés du triangle.

b) Lorsqu'une droite tourne autour d'un point fixe, sa transversale réciproque enveloppe une conique inscrite au triangle de référence; le centre de cette conique est le complémentaire du point fixe.

(*) Voir *Journal de Bourget, Math. El.*, 1886, p. 158 et *Math. Sp.* p. 233. Reuchle avait même proposé le terme de *Couple de Nagel* pour désigner l'ensemble formé par un point et son complémentaire.

Digitized by Google

6° Le cercle circonscrit à ABC a pour figure complémentaire le cercle des neuf points.

Le cercle conjugué à ABC a pour figure anticomplémentaire le cercle Δ dont M. de Longchamps, a fait connaître un grand nombre de propriétés (*J. de Bourget, Math. spéc.*, 1886).

La théorie des points complémentaires, jointe à celle des points réciproques des différents ordres et à celle des points inverses, nous paraît être appelée à un grand rôle dans la géométrie du triangle; elle montre les liens unissant certains éléments qui paraissent différer totalement, et introduit des simplifications notables. (*A continuer.*)

SUR LE CERCLE TRIPLICATEUR(*);

par M. TUCKER.

1. Au triangle fondamental ABC, nous inscrivons un triangle $A_1B_1C_1$ tel que l'on ait

$$(a_1, b) = A, \quad (b_1, c) = B, \quad (c_1, a) = C,$$

où (m, n) désigne l'angle compris entre les droites (m, n).

La circonférence $A_1B_1C_1$ rencontre les côtés de ABC aux sommets d'un second triangle inscrit $A_2B_2C_2$ satisfaisant aux égalités

$$(a_2, c) = A, \quad (b_2, a) = B, \quad (c_2, b) = C.$$

Les angles des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ont pour valeurs

$$A_1 = 2B - C, \quad B_1 = 2C - A, \quad C_1 = 2A - B,$$
$$A_2 = 2C - B, \quad B_2 = 2A - C, \quad C_2 = 2B - A,$$

et les côtés sont exprimés par

$$a_1 = 2\rho \sin (2B - C), \quad a_2 = 2\rho \sin (2C - B), \text{ etc.}$$

ρ étant le rayon du cercle $A_1B_1C_1$.

(*) M. Tucker nous a adressé une note sommaire sur ce nouveau cercle au mois d'octobre dernier. Ces recherches ont été communiquées à la Société mathématique de Londres, séance du 9 novembre, et résumées dans l'*Educational Times*, n° de décembre.

L'auteur a proposé la dénomination de *Sine-Triple-Angle-Circle*, que, faute de mieux, nous rendons par le terme de *Cercle Triplicateur*.

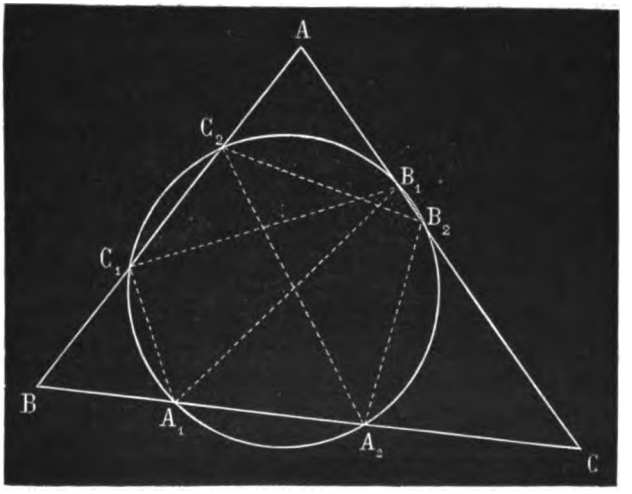
Digitized by Google

De la relation

$$a = b_1 + 2c_1 \cos C, \quad \text{ou} \quad 2R \sin A = 2\rho \sin(2C - A) + 4\rho \sin(2A - B) \cos C,$$

on tire

$$\rho = \frac{R}{1 + 8 \cos A \cos B \cos C}.$$



2. Les cordes d'un cercle étant proportionnelles aux sinus des angles qu'elles sous-tendent, on trouve aisément les égalités

$$C_1B_2 : A_1C_2 : B_1A_2 = \sin A : \sin B : \sin C,$$
$$B_1C_2 : C_1A_2 : A_1B_2 = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C,$$
$$A_1A_2 : B_1B_2 : C_1C_2 = \sin 3A : \sin 3B : \sin 3C,$$

dont la dernière justifie le nom donné au cercle $A_1B_1C_1$.

3. Soit, en coordonnées barycentriques,

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + z)(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0$$

l'équation de ce cercle. En exprimant que les coordonnées ***absolues*** des points A_1 et A_2, lesquelles sont

$$y = \frac{CA_1}{a}, \quad z = 1 - \frac{CA_1}{a}; \quad y = \frac{CA_2}{a}, \quad z = 1 - \frac{CA_2}{a},$$

vérifient l'équation $a^2yz - \mu y - \nu z = 0$, on voit que les paramètres λ, μ, ν sont égaux aux puissances des sommets du triangle de référence par rapport au cercle; donc

$$\lambda = 2a_1a_2 \cos A = 8\rho^2 \cos A \sin(2B - C) \sin(2C - B), \text{ etc.}$$

Digitized by Google

4. Si l'équation d'une conique est $f(x, y, z) = 0$, les coordonnées du centre vérifient les égalités

$$f'_x = f'_y = f'_z.$$

Les coordonnées du centre O′ du cercle $A_1B_1C_1$ satisfont donc aux équations

$$b^2z + c^2y = \alpha + \lambda, \quad c^2x + a^2z = \alpha + \mu, \quad a^2y + b^2x = \alpha + \nu, \quad (1)$$

α désignant une inconnue auxiliaire. Le centre O du cercle ABC résulte des équations

$$b^2z + c^2y = \alpha, \quad c^2x + a^2z = \alpha, \quad a^2y + b^2x = \alpha. \quad (2)$$

Les deux systèmes (1) et (2) ont chacun pour conséquence

$$(b^2z + c^2y)(\mu - \nu) + (c^2x + a^2z)(\nu - \lambda) + (a^2y + b^2x)(\lambda - \mu) = 0. \quad (3)$$

Donc l'égalité (3) représente la droite OO′. Elle peut prendre la forme

$$\frac{\sin(B - C)}{\cos A}x + \frac{\sin(C - A)}{\cos B}y + \frac{\sin(A - B)}{\cos C}z = 0.$$

On trouve immédiatement la solution $x : y : z = \cos^2 A : \cos^2 B : \cos^2 C$; par conséquent, la droite OO′ passe par le point d'intersection des droites joignant A, B, C aux pieds des symédianes, issues de l'orthocentre H, dans les triangles BHC, CHA, AHB. (J. N.)

PROPRIÉTÉS DE TROIS FIGURES SEMBLABLES(*);

par M. J. Casey, professeur à l'Université catholique de Dublin.

1. Dans tout système de trois figures semblables F_1, F_2, F_3, il existe une infinité de systèmes de trois segments homologues AA′, BB′, CC′ dont les extrémités sont situées sur une même circonférence X. Le lieu du centre de X est le cercle de similitude de F_1, F_2, F_3.

Les droites AA′, BB′, CC′ enveloppent trois paraboles.

2. Le point de Brianchon de l'hexagone formé par les tangentes aux points A, B, C, A′, B′, C′ du cercle X, est le point de Lemoine des cordes AA′, BB′, CC′.

(*) M. Casey nous a communiqué ces intéressants théorèmes au commencement du mois de décembre dernier. — On peut les rattacher, en partie, aux propriétés des homographies de cordes d'un cercle, que nous avons étudiées avec M. Tarry, dans une communication au Congrès de Nancy. (J. N.).

Digitized by Google

Les projections du centre O du cercle X, sur les diagonales de l'hexagone de Brianchon sont les points doubles de F_1, F_2, F_3.

OK est un diamètre du cercle de similitude.

3. Si les perpendiculaires abaissées de K sur les rayons OA, OA′ rencontrent la corde AA′ en (a, a'), et que (b, b'), (c, c') soient les points semblablement déterminés sur BB′ et CC′, les six points a, a', b, b', c, c' appartiennent à une même circonférence.

4. On partage les droites KA, KA′ dans un rapport donné $m:n$, et par les points de division on mène des droites respectivement perpendiculaires aux rayons OA, OA′ et rencontrant AA′ en α, α', les points α, α' et les points déterminés de la même manière sur BB′ et CC′, sont concycliques.

5. Étant donné un heptagone circonscrit à un cercle, dont les points de contact sont les sommets d'un heptagone harmonique, les sept hexagones qu'on obtient, en omettant successivement un côté du premier polygone, ont même point de Brianchon. Les sept hexagones inscrits correspondants ont même ligne de Pascal.

Un théorème analogue a lieu pour tous les polygones harmoniques d'un plus grand nombre de côtés.

6 Soient A, A′ deux sommets opposés d'un hexagone inscrit à un cercle, P le pôle de la corde AA′, L et L′ les points de rencontre des rayons OA, OA′, avec la ligne de Pascal de l'hexagone, enfin α, α' les projections du centre O sur les droites PL, PL′; les points α, α' et les deux autres couples de points semblablement déterminés sont situés sur une même circonférence.

7. Soient λ, λ' des points des rayons OA, OA′, tels que les rapports anharmoniques $(OA\lambda L)$, $OA'\lambda'L')$ ont une valeur donnée. Les projections de O sur les droites $P\lambda$, $P\lambda'$ et sur les deux autres couples de droites homologues de l'hexagone sont situées sur une même circonférence.

8. Dans trois figures semblables F_1, F_2, F_3, il existe une infinité de triades de cercles correspondants $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui ont même axe radical.

L'enveloppe de l'axe radical est une parabole.

9. Par un point arbitraire, on peut faire passer trois cercles homologues de F_1, F_2, F_3.

Il existe quatre systèmes de trois cercles homologues touchant une droite donnée.

On peut trouver huit systèmes de trois cercles homologues touchant un cercle donné.

Digitized by Google

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

(Suite; voir *Mathesis*, t. VI, p. 53.)

11. Étant donnés un cercle O et un point fixe A, si l'on mène un diamètre quelconque BC, le point de concours H des hauteurs du triangle ABC, et le centre O′ du cercle circonscrit à ABC décrivent des droites.

Le lieu de H est la polaire de A ; H et O′ sont en ligne droite avec le centre de gravité, lequel est fixe, etc. (DE ROCQUIGNY.)

12. Soient, dans le triangle sphérique ABC, q_1 et q_2 les distances du milieu de la base BC aux bissectrices intérieure et extérieure de l'angle BAC, et soit q_3 la distance de A à l'arc de grand cercle perpendiculaire au milieu de BC. Démontrer que

$$2 \sin q_1 \sin q_2 = \sin q_3 \sin (B + C) \sin \tfrac{1}{2} a. \qquad \text{(MILLER.)}$$

13. Dans tout triangle ABC :

$$\frac{a^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A + b^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} B + c^2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}{a^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A + b^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} B + c^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{R + r}{R - r}. \text{ (KNOWLES.)}$$

14. Si α, β, γ, δ sont les angles sous lesquels les diagonales d'un cube sont vues d'un point quelconque de la sphère inscrite, on a

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \delta = 8. \qquad \text{(CLARKE.)}$$

15. Trouver les sommes

$$S = 1 + n \cos \theta + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos 2\theta + \cdots$$

$$S' = n \sin \theta + \frac{n(n-1)}{1.2} \sin 2\theta + \cdots$$

On cherche $S + S'\sqrt{-1}$, en appliquant la formule de Moivre.

16. Soient F le foyer, et C un point fixe de l'axe focal AA′ d'une ellipse. Un rayon vecteur quelconque FD de l'ellipse rencontre en B la circonférence qui a pour diamètre AC. La droite CD rencontre la parallèle menée par B à AA′ au point M. Trouver le lieu décrit par M.

(H. BROCARD.)

17. Étant donnés deux triangles quelconques ABC, A′B′C′, trouver deux points O, O′ tels que les triangles OAB, OBC, OCA soient respectivement semblables aux triangles O′B′A′, O′C′B′, O′A′C′. (ARTZT.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 134.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 119.)

Soient données diverses cycloïdes, l'une ordinaire, les autres allongées ou raccourcies(**), de même base en position, de même hauteur et de même sommet, et le cercle générateur, tangent à ces courbes en leur sommet commun. Les tangentes à ces diverses courbes aux points situés sur une parallèle à la base commune se coupent en un même point situé sur la développante du cercle générateur considéré. (J. MISTER.)

Soient S le sommet d'une cycloïde ordinaire, SmS′ la circonférence du cercle générateur dans la position qui correspond à ce sommet. La définition habituelle de la cycloïde peut être transformée aisément en la suivante : Par un point quelconque m de la circonférence SmS′, menez une parallèle mM à la base de la cycloïde, et prenez mM = arc mS ; le point M engendrera la courbe.

Représentons la vitesse du point m sur le cercle SmS′ par la droite mt tangente au cercle SmS′ et égale à l'arc mS. Si la longueur mM restait constante, le point M serait animé d'une vitesse MT égale et parallèle à mt. Mais pour que la droite mM reste égale à l'arc mS = mt, il faut attribuer au point M, outre la vitesse MT, une vitesse égale à celle de m sur la circonférence ou représentée par Mm = mt; donc la vitesse de M sur la cycloïde est la droite Mt, diagonale du parallélogramme construit sur MT et Mm.

Pour obtenir une cycloïde allongée ou raccourcie, on prend sur la

---

(*) Nous avons oublié de mentionner de bonnes solutions des questions 501, 527, 530 par M. d'Hondt, des questions 515 et 527 par M. Farisano, et de n° 524 par M. Mandart.

(**) La signification précise de ces termes est indiquée dans la démonstration; elle diffère de l'acception qu'on attribue souvent aux mots de *cycloïde allongée ou raccourcie*.

Le théorème de M. Mister peut se conclure de la remarque que l'ombre d'une hélice tracée sur un cylindre droit, prise sur la base du cylindre, est, suivant l'inclinaison des rayons, une cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie (Voir *Mathesis*, t. I, p. 137).

Digitized by Google

droite $m\mathrm{M}$ parallèle à la base de la cycloïde une longueur $m\mathrm{M}'$ égale à $\mathrm{K}.m\mathrm{S}$, K étant une constante, qui est plus grande ou plus petite que l'unité, suivant que l'on veut avoir une cycloïde allongée ou raccourcie. Il est facile de voir que la vitesse du point M′ sur sa trajectoire est la droite $\mathrm{M}'t$, diagonale du parallélogramme construit sur les droites $\mathrm{M}'m$, M′T′, dont la seconde est égale et parallèle à mt.

Or le point t décrit une développante du cercle $Sm\mathrm{S}'$, donc, etc. (J. N.)

Seconde solution par M. J. Mister(*). Si l'on pose l'arc $Sm = s$ et la longueur $m\mathrm{M} = l$, l'équation de l'une quelconque des cycloïdes sera

$$l = \mathrm{K} \cdot s. \tag{1}$$

Pour un second point M′ infiniment voisin du premier, on aura

$$l' = \mathrm{K} \cdot s'$$

et, partant,

$$l - l' = \mathrm{K}(s - s').$$

Menons M′R parallèle à $m'm$; l'équation précédente s'écrira

$$\mathrm{MR} = \mathrm{K} \cdot mm' = \mathrm{K} \cdot \mathrm{M}'\mathrm{R}. \tag{2}$$

Soit t le point de rencontre des éléments mm' et MM′ prolongés. Le triangle infinitésimal MM′R étant semblable au triangle $\mathrm{M}mt$, on aura la proportion

$$\frac{\mathrm{MR}}{\mathrm{M}'\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{M}m}{mt}. \tag{3}$$

Des relations (2) et (3), on déduit

$$\frac{\mathrm{M}m}{mt} = \mathrm{K} \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}m = \mathrm{K}.mt; \tag{4}$$

et, comme on a déjà $\mathrm{M}m = \mathrm{K} \cdot s$, on en conclura

$$mt = s. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

(*) Voir Carnot, *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal*, page 42 (5e édition, 1881) : Mener une tangente à la cycloïde.

Digitized by Google

×Question 382.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 216.)

Si la somme des angles d'un triangle sphérique ABC ***est égale à 4 droits, la distance des milieux de deux côtés est égale à un quadrant et les segments des médianes compris entre leur point de rencontre et les sommets sont les suppléments des côtés correspondants.***

Solution par MM. Pisani, Gob *et* Deprez. Soient A', B', C' les milieux des côtés, G le point de concours des médianes, ε l'excès sphérique ou $A+B+C-\pi$.

1° D'après une formule connue,

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos B'C'}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos C'A'}{\cos\frac{b}{2}}=\frac{\cos A'B'}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Par hypothèse, $\varepsilon=\pi$; donc $\cos\frac{\varepsilon}{2}=0$, $\cos B'C'=0$, $B'C'=\frac{1}{2}\pi$.

2° Dans le triangle AA'C, on a

$$\cos AA'+\cos A'C=2\cos A'B'\cos\frac{b}{2};$$

d'où, à cause de $A'B'=\frac{1}{2}\pi$, $AA'+A'C=\pi$. Donc ***les médianes du triangle*** ABC ***sont les suppléments des moitiés des côtés correspondants, et chaque médiane divise l'angle correspondant en deux parties respectivement égales aux suppléments des deux autres angles du triangle.***

3° Le triangle ABA' coupé par l'arc transversal CC', donne

$$\frac{\sin AC'}{\sin C'B}\cdot\frac{\sin BC}{\sin A'C}\cdot\frac{\sin A'G}{\sin GA}=1,$$

ou

$$2\cos\frac{a}{2}\cdot\sin\left(\pi-\frac{a}{2}-GA\right)=\sin GA,$$

égalité qui se ramène à

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos GA+\left(2\cos^2\frac{a}{2}-1\right)\sin GA=0,$$

d'où l'on tire $GA=\pi-a$.

4° Cette relation combinée avec $AA'=\pi-\frac{a}{2}$ conduit à $GA'=\frac{a}{2}$;

Digitized by Google

donc $A'B = A'C = A'G$; donc *les circonférences qui ont pour diamètres sphériques les trois côtés du triangle* ABC *passent par* G.

Autre solution. Soit DABC un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales (tétraèdre *isoscèle* ou *équifacial*)(*) Désignons par α, β, γ, δ les centres de gravité des faces, par A_1, B_1, C_1 les milieux des arêtes BC, CA, AB, par A_2, B_2, C_2 ceux des arêtes DA, DB, DC. Les quatre faces étant égales, si l'on fait coïncider deux d'entre elles, les sommets opposés coïncident également; donc les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, sont égales entre elles, et leur point de concours G est aussi le centre de la sphère circonscrite et le centre de la sphère inscrite au tétraèdre. La sphère circonscrite étant partagée en quatre triangles sphériques égaux ABC, ABD, BCD, ACD, l'excès sphérique de chacun de ces triangles est égal à deux droits; donc les dièdres du trièdre OABC ont une somme égale à quatre droits. La figure $A_1B_1A_2B_2$ étant un losange, les droites A_1A_2, B_1B_2 sont perpendiculaires; ces lignes coïncidant avec les bissectrices des triangles isoscèles COB, COD, on voit que le trièdre $OA_1B_1C_1$ est trirectangle, ce qui démontre la première partie de la question. La droite $DO\delta$ est l'intersection des plans qui passent par une arête du trièdre OABC et la bissectrice de la face opposée; l'angle $\delta OD = \pi - DOA = \pi - BOC$, ce qui achève la démonstration. (J. N.)

Question 388.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 246.)

Trouver le lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites données et dont l'axe passe par un point donné.

Solution analytique, par MM. Deprez *et* Gob. Soient OA, OB les droites données, P le point donné. Prenons pour axes OA et une perpendiculaire menée par O. L'équation focale de la parabole est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny + t)^2, \qquad (1)$$

avec la condition

$$m^2 + n^2 = 1, \qquad (2)$$

(*) Pour ce tétraèdre, on peut voir : *Lemoine*, Congrès de Nantes (1875); N. A. M., 1880, (2) XIX, p. 133 et p. 403; *Archives de Grunert*, t. LVII; N. C. M., t. II, p. 144.

Digitized by Google

qui fait prendre à l'équation (1) la forme

$$n^2x^2 - 2nmxy + m^2y^2 - 2(\alpha + mt)x - 2(\beta + nt)y + \alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0.$$

L'axe des x étant une tangente à la courbe, on a la relation

$$(\alpha + mt)^2 - n^2(\alpha^2 + \beta^2 - t^2) = 0, \quad \text{ou} \quad m\alpha + t = n\beta. \qquad (3)$$

Si l'équation de OB est $y = ax$, la condition de tangence est

$$[\alpha + mt + (\beta + nt)a]^2 - (ma - n)^2(\alpha^2 + \beta^2 - t^2) = 0;$$

dans cette égalité, le terme indépendant de a est nul (OA étant la seconde tangente issue de O), et si l'on élimine t au moyen de (3), on trouve

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha + a\beta}{a\alpha - \beta}. \qquad (4)$$

La perpendiculaire abaissée du foyer (α, β) sur la directrice passe par le point donné P (p, q); d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{p - \alpha}{q - \beta}. \qquad (5)$$

Si l'on élimine m et n entre (4) et (5), on obtient l'équation du lieu cherché :

$$\beta^2 - \alpha^2 + \left(p - \frac{q}{a}\right)\alpha - \left(q + \frac{p}{a}\right)\beta + \frac{2\alpha\beta}{a} = 0.$$

Le lieu est donc une hyperbole équilatère passant par P et O; le centre de cette courbe est au milieu de OP et le carré du demi-axe est égal à

$$\frac{a(q^2 - p^2) + 2pq}{4\sqrt{1 + a^2}}.$$

Solution géométrique. F étant le foyer de l'une des paraboles, on sait que la droite OF et une parallèle à l'axe PF, menée par O, sont également inclinées sur la bissectrice de l'angle AOB. Donc on peut engendrer le lieu cherché par l'intersection de deux droites tournant autour de O et P de manière à faire des angles égaux avec la bissectrice de l'angle AOB. On sait qu'un tel lieu est une hyperbole équilatère dans laquelle O et P sont les extrémités d'un diamètre et dont une asymptote est parallèle à la bissectrice. (Pisani, Farisano, Gob, Verniory.)

MM. Pisani, Gob et Verniory obtiennent l'équation du lieu en traduisant analytiquement la construction du point F qu'on vient de donner. Autre solution géométrique par M. Deprez.

Digitized by Google

×Question 395.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 247.)

Si

$$a=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta},\quad b=\frac{\sin\beta}{\sin\theta},\quad a'=\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta},\quad b'=\frac{\sin\beta}{\sin\theta'},$$

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'=\theta,$$

on a

$$(a+b)^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}=1,$$

$$(aa'-bb')(ab'-ba')=a'b'-ab,$$

$$(a-a')^2+(b-b')^2+2(a-a')(b-b')\cos\theta=\frac{(ab'-ba')^2-(a-a')^2}{aa'}.$$

Si, de plus, $(a-a')^2-(ab'-ba')^2=0$, *il faut que* $\alpha=\alpha'$ *et si* $(a^2+a'^2)-(ab'-ba')^2=0$, *il faut que* $\alpha=\alpha'+\frac{1}{2}\pi$. (C. Bergmans.)

Solution par MM. Pisani *et* Mineur. Les hypothèses de la question montrent que 1, a, b sont les côtés d'un triangle CAB dont les angles opposés sont $\pi-\theta$, α, β; de même, on peut considérer un second triangle CA'B' dont les côtés sont 1, a', b' et les angles $\pi-\theta$, α', β'.

1° Le triangle CAB donne

$$1=a^2+b^2+2ab\cos\theta$$
$$=(a^2+b^2)\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2ab\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=(a+b)^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(a-b)^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

2° Si entre les relations

$$1=a^2+b^2+2ab\cos\theta,\quad 1=a'^2+b'^2+2a'b'\cos\theta,\qquad (1)$$

on élimine $\cos\theta$, on trouve

$$a'b'-ab=(a^2+b^2)a'b'-(a'^2+b'^2)ab=(aa'-bb')(ab'-ba').$$

3° Si l'on ajoute les égalités (1), on trouve

$$2=(a^2+a'^2)+(b^2+b'^2)+2(ab+a'b')\cos\theta$$
$$=(a-a')^2+(b-b')^2+2(a-a')(b-b')\cos\theta$$
$$+2aa'+2bb'+2(a'b+ab')\cos\theta;$$

Digitized by Google

donc

$$(a-a')^2+(b-b')^2+2(a-a')(b-b')\cos\theta=$$
$$2(1-aa'-bb'-a'b\cos\theta-ab'\cos\theta)=$$
$$2\left(1-aa'-bb'-a'\frac{1-a^2-b^2}{2a}-a\frac{1-a'^2-b'^2}{2a'}\right)$$
$$=\frac{(ab'-ba')^2-(a-a')^2}{aa'}.$$

4° L'égalité

$$(a-a')^2=(ab'-ba')^2$$

se transforme ainsi :

$$\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\alpha')^2=[\sin\alpha\sin(\theta-\alpha')-\sin\alpha'\sin(\theta-\alpha)]^2$$
$$=\sin^2\theta\sin^2(\alpha-\alpha'),$$

ou

$$\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')=\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha'),$$

d'où l'on tire $\alpha=\alpha'$.

5° De même, de

$$a^2+a'^2=(ab'-ba')^2,$$

on déduit

$$\sin^2\alpha+\sin^2\alpha'=\sin^2(\alpha-\alpha'),$$

et en développant le deuxième membre :

$$2\sin\alpha\sin\alpha'(\sin\alpha\sin\alpha'+\cos\alpha\cos\alpha')=0;$$

par conséquent $\cos(\alpha-\alpha')=0$, $\alpha-\alpha'=\frac{1}{2}\pi$.

M. Minoliti a résolu la même question au moyen de transformations trigonométriques.

QUESTIONS D'EXAMEN.

301. Les côtés du triangle maximum inscrit dans une ellipse forment, avec les arcs sous-tendus dans l'ellipse, des aires équivalentes (A démontrer par projection).

302. Trouver la somme des nombres représentés par les permutations de 12345.

303. Démontrer que les relations

$$\text{coséc A}=\tfrac{1}{2}(\text{coséc B}+\text{coséc C}),$$
$$\cos A=\frac{2\sin B\sin C}{\cos B+\cos C}-1,$$

résultent l'une de l'autre. On suppose $A+B+C=180°$.

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

551. Sur une base donnée AB, on construit un triangle ABC tel que l'angle A = 2B. Soient AD la bissectrice de l'angle CAB, DE une parallèle à AB, rencontrant CA en E. Démontrer *géométriquement* que les points C et E décrivent des coniques dont A est un foyer. (Gob.)

552. On décrit deux cercles tangents entre eux et touchant, respectivement, les côtés des angles B et C du triangle ABC. Trouver 1° le lieu du point de contact de ces cercles; 2 l'enveloppe de la ligne des centres(*).

×**553.** Soit, dans le triangle ABC, M un point tel que les angles MAC, MBC sont égaux, le lieu de ce point est une hyperbole équilatère F_e (*Mathesis*, t. VI, pp. 57 et 58). Désignons par A', B', C' les points de rencontre des droites AM, BM, CM avec les côtés de ABC; par B_c et A_c les points où les parallèles à MC menées respectivement par B' et A' coupent AB; par C_b le point de rencontre de BC avec la parallèle à AA' menée par C'; enfin, par C_a celui de AC avec la parallèle à BB' menée par C'. Cela posé :

1° Les quatre points C_a, C_b, A_c, B_c sont sur une circonférence; 2° C_aC_b est antiparallèle de AB; 3° C_aB_c et C_bA_c sont respectivement parallèles à CB et CA; 4° si CC' est la hauteur, O est l'orthocentre de ABC, point commun aux trois hyperboles F_a, F_b, F_c et les trois circonférences analogues à celles que nous désignons dans 1° se confondent avec la circonférence de Taylor; 5° la tangente en C à F_c est la symédiane issue de C, et les tangentes en A et B ont pour direction, la direction symétrique de AB par rapport à la bissectrice de l'angle BCA. (E. Lemoine.)

×**554.** Démontrer que si $x = \frac{2\pi}{13}$,

$$(\cos x + \cos 5x)(\cos 2x + \cos 3x)(\cos 4x + \cos 6x) = -\frac{1}{8}.$$

(R. H. Graves.)

×**555.** Soient A', B', C' les points où les côtés d'un triangle sphérique trirectangle ABC sont rencontrés par les arcs de grand cercle joignant les sommets opposés à un point quelconque M de la sphère. Démontrer que le périmètre du triangle A'B'C' est constant.

(Nicoli, *Journal de Besso.*)

(*) Cette question se rattache au célèbre probleme de Malfatti.

Digitized by Google

REMARQUES DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE (*);

par M. Ernest Cesàro, professeur à l'Université de Palerme.

1. Considérons, en un point M d'une courbe quelconque, la circonférence Ω, décrite sur le rayon de courbure comme diamètre. C, C_1, C_2, C_3,... étant les centres de courbure successifs, correspondant au point M, on trouve facilement, par le calcul ou par la géométrie, que Ω touche son enveloppe en M et en un second point N, situé sur la droite MC_1 : ce point est la projection de C sur MC_1. Il est évident, d'ailleurs, que les tangentes à l'enveloppe de Ω, en M et en N, étant aussi tangentes à Ω, sont *antiparallèles* relativement à MC_1. Il en résulte que, *si* MC_1 *passe par un point fixe* O, non situé entre M et N, *la ligne* (N) *est inverse de* (M), le centre d'inversion étant placé en O. Si ce point se trouve entre M et N, il faut faire subir à la ligne (N) une rotation de 180° autour de O, pour qu'elle coïncide avec l'inverse de (M), de sorte que, au point de vue de leur *nature*, les lignes considérées ne cessent pas d'être *inverses*.

2. Si M appartient à une *ligne cycloïdale*, et que l'on appelle M' le point diamétralement opposé à M sur le cercle générateur, et O le centre du cercle directeur, on sait que les points C, C_2, C_4,... sont situés sur OM', tandis que C_1, C_3, C_5,... se trouvent sur OM. La droite MC_1 passe donc par le *point fixe* O. Cela démontre le *théorème de* M. Mennésson, (*Mathesis*, t. V. p. 192). La même propriété appartient à la *développante de cercle*, parce que, dans cette courbe, le point C_1 est *fixe* : dans ce cas, la ligne (N) est une *tractrice polaire*.

3. Pour savoir s'il y a d'autres lignes, pour lesquelles MC_1 pivote autour d'un point fixe, il convient d'étudier, plus généralement, l'enveloppe de MC_1. On découvre alors la propriété que voici : *la droite* MC_1 *touche son enveloppe au point où elle rencontre* CC_2. Conséquemment, si MC_1 passe par un point fixe, celui-ci ne peut être que le point commun

---

(*) Cet article contient la solution de la *Question* 461 (Mennesson) : « *L'enveloppe des circonférences, qui ont pour diamètres les rayons de courbure d'une épicycloïde, est une courbe inverse de cette épicycloïde* ».

Digitized by Google

aux droites MC_1, CC_2. En y plaçant le pôle, on trouve, pour exprimer le rayon vecteur et sa dérivée relative à l'arc, les formules

$$u = \rho \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}}{\rho + \rho_2}, \quad \frac{du}{ds} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}},$$

ρ, ρ_1, ρ_2,... étant les rayons de courbure successifs. L'élimination de u conduit à l'équation

$$\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} + 3 \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{d^2\rho}{ds^2} = 0.$$

L'équation intrinsèque générale des lignes cherchées est donc

$$\rho^2 = as^2 + 2bs + c.$$

Pour $a > 0$ on trouve une classe remarquable de courbes, offrant des caractères différents, suivant que $b^2 - ac$ est positif ou négatif : si cette quantité est nulle, on obtient la famille des *spirales logarithmiques*, qui sépare, pour ainsi dire, les deux espèces de lignes que l'on vient de signaler. Si $a < 0$, on a les *lignes cycloïdales*. Enfin, pour $a = 0$, on trouve les *développantes de cercle*. Telles sont *toutes* les courbes douées de la propriété que *le système de leurs cercles* Ω *est enveloppé par deux lignes inverses*.

4. D'après une question proposée et résolue par M. Laisant (*Nouv. Corr. Math.*, 1879, p. 209), ces courbes sont les seules qui jouissent de la proprieté suivante : *la somme des puissances de chacun de leurs points, par rapport à n cercles donnés dans le plan, varie proportionnellement au carré de l'arc*. En général, si l'on veut que cette somme ait la forme $as^2 + 2\beta s + \gamma$, on trouve que les coefficients a, b, c, de l'équation intrinsèque des lignes cherchées doivent être

$$a = \frac{\alpha}{n - \alpha}, \quad b = \frac{\beta}{n - \alpha}, \quad c = \frac{\gamma}{n - \alpha} - \frac{\beta^2 - \alpha\gamma + \sigma}{(n - \alpha)^2},$$

où σ représente la somme des puissances du centre de gravité des centres des cercles considérés, relativement aux mêmes cercles.

5. Ces courbes sont encore *caractérisées* par la propriété que *les centres de courbure successifs, correspondant à un même point, sont situés sur deux droites*. Celles-ci sont mobiles avec le point; mais elles passent constamment par le centre d'inversion. D'après cette propriété, les développées des lignes de la classe que nous étudions appartiennent à la même classe.

Digitized by Google

C'est ce que l'on prouve aussi en observant que l'équation de la première développée peut toujours prendre la forme

$$\rho^2 = as^2 + 2bs + c', \quad \text{où} \quad b^2 - ac' = -a(b^2 - ac).$$

On sait que pour $a > 0$, on a deux espèces (+) et (—) de lignes, suivant que $b^2 - ac$ est positif ou négatif. On voit, maintenant, que les premières développées des lignes de l'espèce (+) appartiennent à l'espèce (—), et réciproquement. Plus généralement, les développées $n^{ièmes}$ des lignes d'une espèce appartiennent à la même espèce ou à l'espèce contraire, suivant que n est pair ou impair.

6. Pour toutes les lignes de l'espèce (+), ainsi que pour les lignes cycloïdales, *le centre de courbure, en un point* M, *se trouve à l'intersection de la normale en* M *avec la polaire de* M, *relative au cercle d'inversion.* Ce cercle est orthogonal à tous les cercles Ω : son rayon est

$$I = \frac{\sqrt{\pm (b^2 - ac)}}{1 + a}.$$

Remarquons que, pour les lignes cycloïdales, I représente aussi le rayon du cercle directeur. Conséquemment : *les cercles ayant pour diamètres les rayons de courbure d'une ligne cycloïdale coupent orthogonalement le cercle directeur.* Ces propriétés acquièrent un certain intérêt si l'on observe que la circonférence Ω est le lieu des points qui correspondent à M sur les *développoïdes* de (M). La ligne (N) est le *lieu des points de rebroussement* de toutes ces développoïdes.

7. On rencontre encore le point N dans une note de M. Laisant, relative à une autre question (*Nouv. Corr. Math.*, 1879, p. 27). Partageons MC, CC_1, au moyen des points P, Q, dans le même rapport constant On démontre facilement que la droite PQ n'est autre que la normale à (P), en P. A cause de la construction, il est clair que PQ enveloppe une parabole, lorsque P se déplace sur MC. Il en est évidemment de même pour toute droite issue de P, et faisant avec PQ un angle constant. En particulier, la tangente à (P), en P, enveloppe une parabole. C'est cette propriété que M. Laisant a signalée, à l'endroit cité : on peut la déduire immédiatement, non du théorème de Chasles (invoqué à tort, *loc cit.*, *note* au bas de la page), mais bien de la théorie des figures *semblablement variables.* Nous ajouterons que *toutes les paraboles* dont il s'agit *ont pour foyer commun le point* N. En outre, *leurs tangentes principales passent par la*

Digitized by Google

projection de N ***sur*** MC, et, par suite, ***leurs sommets sont sur une circonférence.*** La tangente principale de la parabole considérée par M. Laisant (***parabole des tangentes***), passe par les projections de N sur la tangente et sur la normale à (M), en M : ces droites sont touchées par la parabole en leurs points de rencontre avec CN. De même, la tangente principale de la ***parabole des normales*** contient les projections de N sur les droites MC et CC_1, qui sont touchées par la parabole en M et C_1 respectivement.

***

8. Les lignes (M) et (N) pourraient être toujours considérées comme ***inverses***, à un point de vue général : elles marquent, à chaque instant, une inversion sur les tangentes à la courbe (O), ***lieu des centres instantanés d'inversion***. Cette courbe est une ***ligne de poursuite***, relativement aux deux premières. Le rapport des vitesses des mobiles O et M, et le rayon de courbure de (O), au point O, sont donnés par les expressions

$$\frac{\rho_1\rho_2 - \rho\rho_3}{\rho} \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}}{(\rho + \rho_2)^2}, \quad \frac{\rho_1\rho_2 - \rho\rho_3}{\rho} \cdot \left(\frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}}{\rho + \rho_2}\right)^3.$$

De même, le rapport des vitesses des mobiles N et M, et le rayon de courbure de (N), au point N, sont respectivement

$$\frac{\rho_1^2 - \rho\rho_3}{\rho^2 + \rho_1^2}, \quad \rho\frac{\rho_1^2 - \rho\rho_2}{\rho^2 - \rho_1^2 + 2\rho\rho_2}.$$

Ces résultats sont suffisants pour déterminer les équations intrinsèques des lignes (O) et (N), connaissant celle de (M). Remarquons que le facteur $[(\rho_1\rho_2 - \rho\rho_3) : \rho]$ est susceptible d'une interprétation géométrique simple : sa valeur absolue représente le segment intercepté par MC_1 sur C_2C_3, à partir de C_3. La condition nécessaire et suffisante pour que (O) se réduise à un ***point*** est $\rho_1\rho_2 - \rho\rho_3 = 0$: elle se confond avec la condition que C_3 soit situé sur MC_1. On retrouve ainsi, par une autre voie, les résultats signalés dans les ***Remarques*** **3** et **5**.

9. Pendant que le centre d'inversion se déplace sur (O), le rayon I varie suivant une certaine loi. On trouve facilement

$$I = \frac{\rho}{\rho + \rho_2}\sqrt{\pm(\rho_1^2 - \rho\rho_2)}, \quad I\frac{dI}{ds} = \pm\frac{(\rho_1\rho_2 - \rho\rho_3)(\rho^2 + 2\rho_1^2 - \rho\rho_2)}{2(\rho + \rho_2)^3},$$

le signe + correspondant au cas de O non situé entre M et N. ***Dans***

Digitized by Google

quels cas le cercle d'inversion est-il constant? Si l'on veut que I soit constant, et, en même temps, que (O) ne se réduise pas à un point, il faut que l'expression $\rho^2 + 2\rho_1^2 - \rho\rho_2$ soit nulle, ce qui est impossible pour $\rho_1^2 > \rho\rho_2$. Il faut donc supposer $\rho_1^2 < \rho\rho_2$, de sorte que, si l'on considère le symétrique N′ de N, par rapport à O, c'est la ligne (N′) qui est l'*inverse* de (M). Cela étant, les coordonnées intrinsèques de M doivent satisfaire à l'équation

$$\rho\frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - 1 = 0,$$

dont l'intégrale générale peut toujours être ramenée à la forme

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

a étant le diamètre du cercle d'inversion. On sait que cette équation représente une *chaînette d'égale résistance*.

10. Dans ce cas, les formules de la *Remarque* 8 montrent que les coordonnées intrinsèques de O sont

$$s_0 = a\log\frac{\rho}{a}, \quad \rho_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\rho^2 - a^2}.$$

L'équation de (O) est donc

$$\rho = \frac{a}{2}\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

La ligne (O) appartient à la classe des *tractrices*, développantes des lignes représentées par l'équation générale

$$\rho = ma + \frac{s^2}{a}.$$

Celles-ci sont des *chaînettes*. Pour $m = 1$, on a la chaînette proprement dite : pour $m = \frac{1}{4}$, on a celle qui admet pour développante la ligne (O). On démontre par les mêmes formules, que (N) est une autre tractrice, développante de la chaînette qui correspond à la valeur $m = \frac{1}{36}$. Remarquons, en outre, que la distance NM reste constamment égale à a, et que le point O se trouve toujours au milieu de MN, de sorte que, dans le cas actuel, les lignes (N′) et (M) coïncident : c'est même le seul cas où cela arrive.

* * *

Digitized by Google

11. Jusqu'ici nous n'avons fait que passer en revue quelques propriétés, obtenues très simplement par des moyens particuliers; mais il convient de remarquer qu'il existe une méthode générale pour traiter les questions de ce genre. Supposons que les coordonnées x et y d'un point P, relativement à la tangente MT, à (M), dirigée dans le sens de CC_1, et à la normale MC, soient données en fonction de s, de sorte que, généralement, P se déplace, suivant une loi connue, dans le plan TMC, pendant que celui-ci, entraîné par M, glisse sur le plan de la figure. Quel est le lieu décrit par P *dans le plan fixe*? Lorsque TMC aura occupé la position infiniment voisine T'M'C', le point P, venu en P', aura acquis les coordonnées $x + dx$, $y + dy$, relativement au second système d'axes, et les coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, relativement au premier. Il s'agit de calculer Δx et Δy. Pour cela, imaginons que le système TMC se transporte d'abord parallèlement en M'; puis que ses axes tournent, autour de M', de l'angle ε; et, enfin, que les coordonnées de P subissent, indépendamment de ces changements d'axes, les variations dues à la variation de s. On obtient immédiatement

$$\Delta x = dx + \varepsilon(y - \rho), \quad \Delta y = dy - \varepsilon x.$$

12. Ces formules suffisent pour la complète détermination de la trajectoire (P). En effet, la tangente trigonométrique de l'angle θ, que la tangente à (P), en P, fait avec MT, est $(\Delta y : \Delta x)$. Le rapport de la vitesse de P à celle de M est

$$K = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} + \frac{y - \rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} - \frac{x}{\rho}\right)^2}.$$

Enfin, le rayon de courbure de (P), en P, s'obtient en divisant l'élément d'arc $K ds$ par l'angle de contingence $d\theta - \varepsilon$. Conséquemment, l'équation intrinsèque de (P) résulte de l'élimination de s entre les égalités

$$s = \int K ds, \quad \rho_0 = \frac{K}{\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{\rho}}.$$

13. Cela étant, soit à chercher l'enveloppe de la ligne L, représentée, dans le système TMC, par l'équation

$$f(x, y, \alpha, \beta, \ldots) = 0,$$

Digitized by Google

où l'on suppose que α, β, ... soient des fonctions de s. Il est évident que les coordonnées des points communs à L et à L' vérifient l'égalité

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = 0.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \Sigma\frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha = 0.$$

Donc, après soustraction,

$$(\rho - y)\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \rho\Sigma\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agissait de trouver. Elle représente une ligne qui rencontre la ligne L aux points où celle-ci touche son enveloppe. Connaissant ces points, on pourra parfaitement en déterminer le lieu dans le plan fixe, en faisant usage des formules contenues dans les *Remarques* **11** et **12**.

14. Par exemple, l'équation de la circonférence Ω est $x^2 + y^2 = \rho y$. La dernière égalité devient $\rho x = \rho_1 y$, conformément à ce que nous avons dit dans la *Remarque* **1**. On démontrerait de la même manière que le cercle décrit sur le diamètre MC_1 touche son enveloppe sur la perpendiculaire abaissée par N à CC_1, etc., etc. Soit encore à chercher l'enveloppe de la droite C_iC_j. On doit remarquer, d'abord, que les coordonnées de C_i sont

$$x_i = \sum_{\nu=0}^{\nu=i}\rho_\nu \sin\frac{\nu\pi}{2}, \quad y_i = \sum_{\nu=0}^{\nu=i}\rho_\nu\cos\frac{\nu\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\rho\frac{dx_i}{ds} = \rho - y_{i+1}, \quad \rho\frac{dy_i}{ds} = x_{i+1}.$$

En utilisant ces formules, on démontre facilement que : *si i et j sont de même parité, la droite* C_iC_j *touche son enveloppe au point où elle rencontre* $C_{i+1}C_{j+1}$. En particulier, le point de contact de MC_{2i-1} avec son enveloppe est situé sur CC_{2i}. On retrouve, pour $i = 1$, le théorème signalé dans la *Remarque* **3**. Il serait facile d'étudier, plus généralement, l'enveloppe d'une droite quelconque. On obtiendrait comme cas particulier la *théorie des développoïdes*, en supposant que la droite passe par M et soit fixe dans le plan mobile. Du reste, la théorie que nous venons d'exposer en embrasse un grand nombre d'autres, comme la théorie des

Digitized by Google

coordonnées axiales, et, plus généralement, des *coordonnées tangentielles curvilignes*.

15. Pour que Δx et Δy soient constamment nuls, on doit avoir

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\rho - y}{\rho}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{x}{\rho}.$$

Le point P alors, sera fixe; mais il décrira, dans le plan mobile, une trajectoire, dont on obtiendra l'équation en éliminant s entre les expressions de x et y. Celles-ci doivent satisfaire aux équations différentielles

$$\rho^2 \frac{d^2x}{ds^2} + \rho_1 \frac{dx}{ds} + x = \rho_1, \quad \rho^2 \frac{d^2y}{ds^2} + \rho_1 \frac{dy}{ds} + y = \rho.$$

Pour les intégrer, dans chaque cas particulier, on devra commencer par se donner l'équation intrinsèque de la trajectoire (M); mais, sans effectuer une telle intégration, il est possible de découvrir les propriétés générales du mouvement apparent de tout point P du plan fixe. On voit d'abord que, aux yeux d'un observateur placé en M, le point P semble se déplacer perpendiculairement à PC, avec une vitesse qui est à la vitesse de M comme PC est à MC. Si l'on prend MC pour axe des x, CC_1 pour axe des y, et que l'on appelle X, Y, les coordonnées du centre de courbure Q de la trajectoire apparente (P), on obtient

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = -\frac{\rho_1 y}{x^2 + y^2 - \rho_1 y}.$$

16. La correspondance des points P, Q, est imparfaitement *réversible*, en ce sens que, si l'on prend les symétriques P′, Q′, de ces points, relativement à MC, le point P′ se déduit de Q′, comme Q se déduit de P. Pour construire Q, connaissant P, on doit chercher le second point B, où PC rencontre le cercle osculateur à (C), en C : le conjugué harmonique de P, relativement à BC, est le symétrique du point cherché, par rapport à C. D'après cette construction, il est facile de reconnaître que les points P, Q′, peuvent toujours être considérés comme les foyers d'une conique, osculatrice en C à la développée de (M). Il en résulte que *si la normale à la trajectoire d'un point* M, *mobile dans un plan, vient à toucher doublement une conique du plan, chaque foyer de la conique, à l'instant du contact, semble se mouvoir, aux yeux d'un observateur placé en* M, *sur une circonférence, ayant pour centre le symétrique de l'autre foyer, par rapport à la normale.*

Digitized by Google

17. Il est aisé d'étendre ces considérations à l'espace. Si l'on prend pour axes la tangente, la binormale et la normale principale d'une ligne doublement courbe (M), au point M, en les dirigeant de telle sorte que le point infiniment voisin M′ ait toutes ses coordonnées positives, on trouve

$$\Delta x = dx + \varepsilon(\rho - z), \quad \Delta y = dy - \eta z, \quad \Delta z = dz + \varepsilon x + \eta y.$$

On en déduit que la surface

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$$

touche son enveloppe sur la surface

$$\frac{z-\rho}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

En particulier, il est facile d'obtenir très simplement, par cette méthode, et surtout plus uniformément tous les résultats de notre *Note de Géométrie* (*Mathesis*, 1883), et beaucoup d'autres résultats nouveaux, dont quelques-uns seront signalés dans une *Note* ultérieure.

18. Si l'on veut savoir, par exemple, suivant quelle droite G le plan rectifiant ($z = 0$), touche son enveloppe, on obtient immédiatement $rx + \rho y = 0$. En d'autres termes, ayant désigné par φ l'angle de G avec MT, on a $\operatorname{tg}\varphi = (-r : \rho)$ conformément à une propriété connue. Soit, en outre,

$$R = \frac{\rho r^2}{\rho^2 + r^2}$$

le rayon de l'*hélice osculatrice* à (M), en M. On peut écrire

$$\rho = \frac{R}{\sin^2\varphi}, \quad r = -\frac{R}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

On sait que G est la génératrice d'une surface développable, dont (M) est une ligne géodésique. Le point V, où G touche l'arête de rebroussement de la surface, s'obtient en appliquant la même égalité générale, donnée à la fin de la dernière *Remarque*, aux équations simultanées $z = 0$, $rx + \rho y = 0$. On trouve que la distance MV est

$$p = \frac{ds}{d\varphi}\sin\varphi = \frac{r\sqrt{r^2+\rho^2}\,ds}{\rho dr - r d\rho}.$$

Elle est *infinie*, lorsque φ est *constant* : la surface (G) est alors *cylindrique*, et la ligne (M) une *hélice*. Ceci démontre le *théorème de Bertrand*.

Digitized by Google

19. Il est facile de connaître les circonstances du mouvement de tout point P, dont on suppose connu le mouvement par rapport au trièdre principal de (M). On voit d'abord que le rapport des vitesses des mobiles P, M, est

$$K=\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}+\frac{\rho-z}{\rho}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}-\frac{z}{r}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}+\frac{x}{\rho}+\frac{y}{r}\right)^2}.$$

Les cosinus directeurs de la *tangente* à (P), en P, sont proportionnels à Δx, Δy, Δz. Cela suffit pour déterminer les directions de la *binormale* et de la *normale principale*, ainsi que les rayons de courbure. On peut faire une application très simple au cas de l'enveloppe (V) de G. On trouve alors que la binormale de (V) est parallèle à la normale principale de (M), et que la normale principale de (V) est perpendiculaire à G, ce qui devait être. On trouve, en outre,

$$K=\cos\varphi+\frac{dp}{ds}.$$

L'élément d'arc est Kds : les angles de contingence et de torsion sont, évidemment, $d\varphi$ et $\sqrt{\varepsilon^2+\eta^2}$. Soit τ leur rapport. On en déduit, en faisant abstraction des signes, que les rayons de courbure de (V) sont donnés par les formules

$$\rho_0=K\frac{ds}{d\varphi},\quad r_0=K\tau\frac{ds}{d\varphi},$$

où

$$\tau=\frac{r\rho}{(r^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\rho\frac{dr}{ds}-r\frac{d\rho}{ds}\right)=\frac{R}{p}.$$

En outre,

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\tau,\quad R_0=\frac{ds}{d\varphi}\sin^2\varphi_0.$$

Ces formules servent à nous faire connaître l'arête de rebroussement de la surface (G). Dans tout ceci, on suppose qu'une ligne soit représentée par ses équations intrinsèques, c'est-à-dire par *deux* relations entre ses *coordonnées intrinsèques* r, ρ, s, ce qui suffit pour en déterminer la nature.

Digitized by Google

20. Remarquons que, dans la surface (G), la quantité τ est invariable le long d'une génératrice, puisqu'elle représente, évidemment, le rapport de l'angle de deux génératrices, infiniment voisines, à l'angle des plans qui touchent (G) suivant ces génératrices. On peut dire aussi que τ est la tangente de l'angle que l'axe du cône circulaire, osculateur à (G) suivant une génératrice quelconque, fait avec cette génératrice. Il est possible de courber un plan suivant les tangentes à une quelconque de ses lignes, de manière à obtenir une surface développable, admettant la transformée de la ligne en question pour arête de rebroussement; mais, pour que cette opération soit déterminée, on doit se donner, avant tout, les valeurs de τ, que l'on veut faire correspondre à chacune des tangentes, c'est-à-dire que l'on doit connaître les ouvertures des cônes circulaires, sur lesquels le plan doit être appliqué, afin de l'amener à la forme voulue. On voit que la fonction τ sert à ***caractériser la courbure*** d'une surface développable.

***

21. Dans le développement de la surface (G), la ligne (M) devient une droite A, tandis que l'arête (V) se change en une courbe (W). Par rapport à l'axe A, il est évident que s et φ sont les ***coordonnées axiales*** de la ligne (W). Celle-ci est donc complètement déterminée par nos formules, lorsque (M) est connue. Inversement, si (V) est donnée dans l'espace, on aura, par élimination de r_0 entre ses équations intrinsèques, l'équation intrinsèque de (W). On en déduira facilement l'***équation axiale***

$$F(\lambda, \varphi) = 0$$

de la même ligne, par rapport à une droite ***quelconque***, A, du plan. En y faisant

$$\lambda = s, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{r}{\rho},$$

on aura la ***condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne double courbe soit possible comme géodésique sur une surface développable donnée.***

22. Si, pour courber un plan suivant les tangentes à une de ses lignes, on se donne les valeurs de τ égales entre elles, on obtient une surface développable ***uniformément courbe***, dont l'arête de rebroussement est, en vertu du ***théorème de Bertrand***, une hélice. Les ***hélicoïdes développables***, dans la plus large acception du mot, sont donc les seules surfaces qui

Digitized by Google

admettent un cône directeur circulaire. D'ailleurs, toute ligne plane est susceptible d'être *tordue* de manière à pouvoir être placée sur un cylindre, dont elle sera une géodésique. La ligne plane étant donnée par son équation intrinsèque, (relation entre s_0 et ρ_0), on en déduit l'équation intrinsèque de la section droite du cylindre en multipliant s_0 et ρ_0 respectivement par les constantes $\sin\varphi_0$ et $\sin^2\varphi_0$.

23. Portons sur la normale principale, de M vers C, la distance MU, égale à R. La parallèle UH, menée par U à G, est l'*axe central* dans le mouvement de M sur (M). Cette dénomination exige quelques éclaircissements, sans quoi les considérations qui vont suivre n'auraient aucun sens. Lorsque nous parlons d'*axe central* dans le mouvement d'*un point*, nous entendons parler de l'axe instantané relatif à la manière *la plus simple* dont ce mouvement puisse être envisagé. C'est ainsi que, dans le cas d'une trajectoire plane, tout point du plan peut être considéré comme un centre instantané de rotation, et le mouvement du point sur sa trajectoire peut toujours être réduit au roulement d'une ligne quelconque sur une autre ligne, convenablement choisie. Mais le mode de réduction *le plus simple* consiste dans la *génération par développement*, c'est-à-dire dans le roulement d'une droite (*normale* à la trajectoire), sur une courbe, (*développée* de la trajectoire). C'est là, d'ailleurs, *la seule génération possible*, si le mouvement de M sur sa trajectoire est envisagé comme étant produit par le glissement de l'élément infinitésimal invariable MM' sur la trajectoire considérée. Une remarque analogue est possible dans l'espace, et elle est nécessaire si l'on veut bien comprendre notre *Théorème de cinématique* (*Nouvelles Annales*, 1884, p. 434), qui répond à la question suivante : *Dans quels cas la surface* (UH) *est elle développable?* Cela arrive évidemment pour les hélices : le mouvement sur une hélice se réduit au roulement et au glissement d'un plan sur un cylindre. Y a-t-il d'autres lignes qui répondent à la question? L'application de la méthode générale aux équations simultanées $z = R$, $rx + \rho y = 0$, donne

$$dR = 0, \quad xdr + yd\rho = 0.$$

Cela exige, avant tout, que R soit *constant*. En second lieu, les équations

$$rx + \rho y = 0, \quad xdr + yd\rho = 0,$$

montrent que l'enveloppe de UH touche cette droite au point U, à

Digitized by Google

moins que $(r : \rho)$ ne soit constant, ce que nous ne supposons pas. On arrive aux mêmes conclusions par une voie beaucoup plus simple et rapide. Si, en effet, (UH) est développable, il en est nécessairement de même de la surface engendrée, dans le trièdre principal de (M), par UH ; mais cette droite reste toujours parallèle au plan rectifiant, et, par suite, elle ne peut engendrer que des surfaces gauches ou des plans. La dernière circonstance ne peut se présenter que dans deux cas : le plan engendré passe par la normale principale ($\varphi = const.$, hélices); ou bien il est perpendiculaire à la normale principale, et, par suite, $R = const.$ On voit donc que, outre les hélices, il y a une infinité de trajectoires (M), telles que la surface (UH) correspondante est développable, et admet nécessairement pour arête de rebroussement la ligne de striction de la surface des normales principales de (M).

24. La construction de ces trajectoires peut toujours être effectuée en prenant, dans un plan, une courbe (W) et une droite A quelconques, et en courbant le plan suivant les tangentes de (W), en ayant soin de donner à τ, pour chaque tangente, une valeur inversement proportionnelle au segment intercepté, sur la tangente considérée, par les lignes A et (W). Par la courbure, A se transforme en une ligne (M), telle que, *si un point la parcourt, son mouvement revient au roulement et au glissement d'un plan sur une surface développable.* Si l'on suppose, par exemple, que (W) soit une tractrice, et que l'on effectue la courbure *uniformément*, il est clair que l'asymptote de la tractice se transforme en une courbe, jouissant de la propriété voulue. On peut même affirmer, en combinant ce résultat avec celui de la *Remarque* (22), que *les seuls hélicoïdes développables, sur lesquels il est possible qu'un point se meuve* librement, *de manière que l'axe central se déplace sur une surface développable, sont ceux dont l'arête de rebroussement admet pour transformée plane une tractrice.* Quant à la trajectoire du mobile (transformée, dans l'espace, de l'asymptote de la tractrice) ses équations intrinsèques sont de la forme

$$\rho = a\,(e^{ms} + e^{-ms})^2, \quad \tau = 2a\,\frac{(e^{ms} + e^{-ms})^2}{e^{ms} - e^{-ms}}.$$

L'axe central décrit aussi un héliçoïde développable; car il reste tangent à la courbe représentée par les équations

$$\rho = \frac{1}{m}\sqrt{e^{-2ms} - 1}, \quad r = 4a\sqrt{e^{-2ms} - 1}.$$

Digitized by Google

En général, les coordonnées intrinsèques s, ρ, r, de (U) sont respectivement

$$\int p \cot\varphi d\varphi, \quad p\cot\varphi, \quad R\cot\varphi.$$

On obtient donc aisément, dans chaque cas particulier, les équations intrinsèques de l'enveloppe (U) de l'axe central.

25. Comme dernière application, soit à chercher l'enveloppe d'un plan quelconque

$$\lambda x + \mu y + \nu z = const.,$$

invariablement lié au trièdre principal de (M). On trouve que ce plan touche son enveloppe suivant sa droite d'intersection avec le plan

$$\nu(rx + \rho y) - (\lambda r + \mu\rho)z + \lambda r\rho = 0.$$

Il est évident que le dernier plan est perpendiculaire au premier, et que le plan parallèle, passant par l'origine, contient la droite G. Conséquemment, *la projection de la droite rectifiante sur un plan quelconque, invariablement lié au trièdre principal, est parallèle à la droite suivant laquelle le plan considéré touche son enveloppe.*

Ces exemples doivent nous suffire pour nous convaincre de l'extrême fécondité des méthodes employées dans cette *Note*, et qui ont pour principe l'*étude des courbes en elles mêmes*. Il n'est pas difficile de s'apercevoir qu'elles sont préférables aux autres méthodes du Calcul différentiel, toutes les fois qu'il s'agit d'étudier les *propriétés intimes* des lignes et des surfaces. Aussi nous proposons-nous de les réunir et de les coordonner dans un ouvrage didactique de « *Géométrie intrinsèque* ».

SUR LES NORMALES D'ANGLE α;

par M. P. H. Schoute, professeur à l'Université de Groningue.

Dans les *Wiskundige Opgaven* (t. II, problème 160), M. Tesch, de La Haye, a étudié, par l'analyse, les droites qui coupent une ellipse donnée, dans un sens déterminé, sous un angle donné α. Appelant ces droites *normales d'angle* α, il a énoncé les deux théorèmes suivants :

I. *Par un point quelconque du plan passent quatre normales d'angle* α *: les pieds de trois de ces droites et le point diamétralement opposé au pied de la quatrième sont situés sur une même circonférence.* (Généralisation du théorème de Joachimsthal).

Digitized by Google

II. Réciproquement, *toute circonférence coupe une ellipse en quatre points tels que trois de ces points et le point diamétralement opposé au quatrième sont les pieds de quatre normales d'angle α concourant en un même point.*

Cette réciproque vient combler une lacune qui existait dans la théorie des normales.

Dans ce qui suit, je me propose de donner une démonstration géométrique(*) de ces théorèmes de M. Tesch, en suivant pas à pas la voie indiquée par Joachimsthal lui-même.

1. *Les pieds des normales d'angle α issues d'un même point* P *sont à l'intersection de l'ellipse donnée ε, avec une conique η passant par* P *et par le centre de l'ellipse.*

En effet, considérons (Fig. 1) deux diamètres conjugués quelconques OR, OQ de ε, et menons par P une droite faisant avec OR l'angle α et rencontrant OQ en Q; les droites OQ, PQ étant les rayons homologues de deux faisceaux projectifs, le lieu du point Q est une conique η (*conique d'Apollonius*) passant par les centres O, P des deux faisceaux. Il est facile de voir que les points d'intersection des courbes ε et η sont les pieds des normales d'angle α menées de P à ε.

Examinons le genre de la courbe η. Le point Q se transporte à l'infini, lorsque les diamètres conjugués OR, OQ font, dans le sens déterminé, l'angle α. Par conséquent : 1° On obtient pour η une hyperbole, lorsqu'il existe dans l'ellipse donnée ε deux couples de diamètres conjugués $y'Ox'$ et $y''Ox''$ (Fig. 2) comprenant l'angle α; les asymptotes de η sont parallèles à Oy', Oy''. 2° On a une parabole, lorsque les diamètres conjugués égaux de ε font entre eux l'angle α; l'axe de la parabole est parallèle à l'un de ces diamètres. 3° Quand l'angle α n'est pas compris entre l'angle aigu et l'angle obtus des diamètres conjugués égaux de ε, la conique d'Apollonius est une ellipse.

Quand on substitue à ε une parabole ou une hyperbole, la conique η est toujours une hyperbole. Dans le premier cas, une asymptote de η est

---

(*) Nos lecteurs nous sauront gré d'avoir accueilli cette généralisation d'une question importante de la théorie des coniques, d'autant plus que les méthodes synthétiques ne sont pas jusqu'ici assez répandues dans l'enseignement.

Nous adressons nos remercîments au savant professeur hollandais pour sa précieuse collaboration. (P. M. et J. N.)

Digitized by Google

parallèle à l'axe de la parabole, de sorte que le pied d'une normale d'angle α se transporte à l'infini, et l'on peut dire que le nombre des normales se réduit à trois.

Supposons que P se transporte à l'infini dans une direction déterminée δ. Alors la conique d'Apollonius se décompose en la droite à l'infini (dont la direction est indéterminée) et le diamètre de ε conjugué avec celui qui fait l'angle α avec δ.

2. *Étant donnés* (Fig. 3) *deux points* A, B *de l'ellipse* ε, *et les deux couples de diamètres conjugués* $y'Ox'$, $y''Ox''$ *qui font l'angle* α, *on demande de construire la droite joignant les points* C, D *qui sont, avec* A *et* B, *quatre pieds de normales d'angle* α *concourantes.*

Pour résoudre ce problème, je m'appuie sur le théorème suivant : Lorsque trois coniques ont deux points communs, elles se coupent, deux à deux, en trois autres couples de points situés sur trois droites concourantes. Je prends pour ces trois courbes : 1° l'ellipse donnée ε; 2° la conique d'Apollonius η qui passe par A, B, O et les points à l'infini sur Oy' et Oy''; 3° un système de deux droites, composé du diamètre BO et de la droite AA_1 parallèle à Oy'. Elles ont la corde commune AB, et les autres sécantes communes à deux de ces courbes sont la droite cherchée CD, la ligne Oy', et la droite A_1B' qui joint les secondes extrémités du diamètre OB et de la corde AA_1 de l'ellipse ε. Donc le point d'intersection P de Oy' avec A_1B' appartient à la droite CD. Semblablement, si l'on mène la corde AA_2 parallèle à Oy'', les droites Oy'' et A_2B' se coupent en un point Q de CD.

3. *Le quatrième sommet* R *du quadrilatère* OPRQ *construit sur* OP, OQ *de manière que les côtés opposés soient antiparallèles par rapport aux axes de l'ellipse donnée, est le pôle de la corde* A'B' (*).

En effet, les deux angles $y'Ox'$ et $x''Oy''$ étant symétriques par rapport à Ox, les droites A_1A' et PR sont toutes deux parallèles au diamètre Ox' conjugué à PO; donc les quatre droites PO, PA', PR, PB' forment un faisceau harmonique, et PR est la polaire du point d'intersection de PO avec A'B'. De même, QR est la polaire du point de rencontre de QO avec A'B', etc.

Observons aussi que les cordes A'B' et CD divisent harmoniquement

(*) Nous désignons par (A, A'), (B, B') ... des points diamétralement opposés de ε.

Digitized by Google

les diamètres Oy', Oy''; d'où une autre solution du problème traité au n° 2.

4. ***Les pieds de trois des normales d'angle α issues d'un même point, et le point diamétralement opposé au pied de la quatrième sont sur une même circonférence.***

Les côtés opposés du quadrilatère OQRP étant antiparallèles par rapport à Ox, les diagonales PQ et OR, et par suite les cordes CD et AB conjuguées à ces diagonales jouissent de la même propriété. Il résulte de là que les points A, B, C', D sont concycliques.

Le théorème de M. Tesch subsiste également, quand on remplace l'ellipse par une hyperbole. Dans le cas de la parabole, les pieds des trois normales d'angle α issues d'un même point et l'extrémité du diamètre rencontrant la courbe sous l'angle α sont situés sur une même circonférence. En effet, si l'on considère la parabole comme la limite d'une ellipse, les normales d'angle α aux points diamétralement opposés restent parallèles pendant la déformation; or une quatrième normale à la parabole a son pied à l'infini.

La démonstration suppose l'existence des couples de diamètres conjugués faisant l'angle α. Mais on peut passer, au moyen du principe de continuité, au cas où ces diamètres deviennent imaginaires.

5. ***Lorsqu'on fait mouvoir*** (Fig. 4) ***un point*** P ***sur la normale d'angle α menée au point*** A ***de l'ellipse*** ε, ***les cercles qui passent par les pieds*** B, C, D ***des trois autres normales d'angle α issues de*** P, ***passent par deux points fixes, qui sont le point*** A' ***diamétralement opposé à*** A, ***et le pied*** S ***de la normale d'angle α abaissée du centre*** O ***de ε sur la tangente menée par*** A' ***à ε.***

En effet, les coniques η qui correspondent aux différentes positions de P passent par quatre points fixes, savoir A, O et les points à l'infini sur Oy' et Oy''. Chacune de ces courbes rencontre ε en trois points variables B, C, D : d'après un théorème connu(*), les côtés du triangle BCD enveloppent une conique fixe λ. Lorsque P se transporte à l'infini sur la normale fixe menée par A, les points B, C, D coïncident avec A' et avec les points où la droite à l'infini C_∞ rencontre ε; donc la conique λ étant tangente à C_∞, est une parabole. Les triangles BCD étant formés par trois tangentes à la parabole λ, les cercles BCD passent par deux

(*) Comparer *Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie*, t. II, p. 242. On peut aussi s'appuyer sur la propriété énoncée à la fin du n° 3.

Digitized by Google

points fixes, qui sont A′ et le foyer S de λ. Ces points sont distincts, car λ touche les droites joignant A′ aux points d'intersection de C_∞ avec ε, droites qui ne coïncident pas avec les lignes isotropes, à moins que ε ne soit un cercle(*).

Pour déterminer la position de S, nous supposons successivement P à l'infini et sur le diamètre Oy'. Dans la première hypothèse, le cercle BCD est remplacé par deux droites, qui sont la ligne C_∞ et la tangente a' menée par A′ à ε. Dans le second cas, le cercle BCD passe par A′ et les extrémités K, K′ du diamètre Oy'. Or, si l'on mène OG, OG_1 parallèles aux cordes supplémentaires A′K, A′K′ et rencontrant a' en G et G_1, et que H, H′ soient les points d'intersection de a' avec Oy' et Ox', on a

$$A'G \cdot A'G_1 = A'H \cdot A'H', \tag{1}$$

$$\frac{A'G}{KO} = \frac{HA'}{HK}, \quad \frac{A'G_1}{K'O} = \frac{HA'}{HK'}. \tag{2}$$

Multipliant les proportions (2) terme à terme, et tenant compte de (1), on trouve

$$\frac{A'H'}{A'H} = \frac{-\overline{KO}^2}{HK \cdot HK'};$$

d'où

$$\frac{A'H - A'H'}{A'H} = \frac{HK \cdot HK' + \overline{KO}^2}{HK \cdot HK'},$$

ou

$$\frac{HH'}{HA'} = \frac{\overline{HO}^2}{HK \cdot HK'}.$$

Remplaçons HK . HK′ par HA′ . HS; il vient

$$\overline{HO}^2 = HH' \cdot HS,$$

d'où l'on conclut aisément que l'angle A′SO = HOH′ = α(**).

(*) J'ai emprunté cet ordre d'idées au mémoire intéressant *Zum Normalenproblem der Kegelschnitte* de M. Pelz, de Graz (*Sitzb. der K. Akad. der Wissensch.* II Abth., t. 85, p. 169), mémoire qui contient une démonstration géométrique de la construction élégante des cercles BCD donnée par Joachimsthal. Mais la recherche du foyer de la parabole λ par la parabole elle-même offrant dans le cas des normales d'angle α des difficultés, j'ai déterminé ce point d'une autre manière.

(**) M. Tesch a démontré ce résultat par l'analyse. Pour le théorème analogue

Digitized by Google

6. ***Si d'un point*** P ***mobile dans le plan d'une parabole*** ε, ***on mène les trois normales d'angle*** α, ***le centre*** M ***du cercle passant par les pieds*** B, C, D ***de ces droites engendre un système homographique avec celui des positions de*** P.

En effet, quand P décrit une droite l_p, les côtés du triangle BCD enveloppent une parabole π. Car, si l'on prend arbitrairement B sur la parabole donnée ε, le point P, et par conséquent les points C et D s'en suivent, de manière que l'enveloppe admet deux tangentes issues du point B; de plus, quand P est à l'infini sur l_p, un côté du triangle BCD est remplacé par C_∞. Le cercle BCD passe par le foyer S de π, et par l'extrémité A′ du diamètre rencontrant ε sous l'angle α(*). Par conséquent, quand P parcourt une droite l_p, M parcourt également une droite l_m; etc.

Si d'un point P (Fig. 5) *mobile dans le plan d'un cercle* O, *on mène les deux normales d'angle* α, *la droite qui joint les pieds* A, B *de ces normales, et le point* P *engendrent deux systèmes réciproques.*

En effet, si N est le point d'intersection des tangentes menées par A et B au cercle O, la circonférence ANB passe évidemment par O et P. Le triangle OPN étant de forme constante, les points P et N parcourent des figures semblables, et la droite AB, polaire de N, enveloppe une figure réciproque de celle qui est décrite par P.

7. ***Sur la normale*** n (Fig. 6) ***d'angle*** α, ***menée en un point*** A ***d'une ellipse*** ε, ***on prend un point quelconque*** P. ***Construire le cercle qui passe par les pieds*** B, C, D ***des trois autres normales d'angle*** α ***issues de*** P.

On détermine (n° 5) les deux points A′, S de ce cercle. Lorsque P parcourt la droite n, le centre M du cercle BCD parcourt la droite m perpendiculaire au milieu de A′S; comme à toute position de P correspond une seule position de M et réciproquement, et que les points à l'infini sur n et m se correspondent, les points P et M déterminent sur n et m des divisions semblables.

---

sur les normales ordinaires, on peut voir les *Comptes rendus* de 1877 (Laguerre), la *Nouvelle Correspondance*, t. IV, pp. 279, 390 (de Longchamps), p. 301 (Jamet), et t. VI, p. 250 (Neuberg); *Sitzb. der Ak.* (Pelz, loc. cit.). Il est probable que Joachimsthal a connu cette proposition.

(*) Les points A′ et S ne peuvent coïncider, à moins qu'on ne prenne pour l_p le diamètre mené par A′.

Digitized by Google

Or, lorsque P est en P_1 sur le diamètre Oy'(*), M se trouve en M_1 à l'intersection de m avec la perpendiculaire élevée en O sur Oy'; de même, on peut déterminer le point M_2 qui correspond au point P_2 situé sur Oy''. La proportion $PP_1 : PP_2 = MM_1 : MM_2$ suffit ensuite pour construire le point M qui correspond à une position donnée de P.

Dans le cas des normales ordinaires, les droites m et n sont parallèles et la droite PM passe par un point fixe(**).

Pour mener d'un point donné P les trois normales d'angle α à une parabole donnée, on cherche le point A' commun à tous les cercles passant par les pieds de telles droites, et l'on détermine l'homographie des points P et M au moyen de quatre couples.

8. ***Étant donnés sur une conique trois points*** A, B, C, ***construire en ces points trois normales d'angle α concourantes.***

Les tangentes en A, B, C à la conique forment un triangle $A_1B_1C_1$. Les circonférences A_1BC, B_1CA, C_1AB se coupent en un même point P : PA, PB, PC sont les droites cherchées, et PAB_1 est l'angle α.

×SUR LA DIVISIBILITÉ DES NOMBRES;

par M. E. Catalan, professeur à l'université de Liége(***).

I. Dans un des derniers numéros de la *Revue Scientifique* (18 septembre), M. Delbœuf, le savant professeur à l'Université de Liège, donne, sans démonstration, un curieux ***théorème sur la divisibilité des nombres,*** que l'on peut énoncer ainsi :

Soit un nombre entier N, *décomposé en deux parties* a a', b b' *telles que les facteurs* a, b *soient premiers entre eux, et que les facteurs* a', b' *soient, aussi, premiers entre eux.*

Soient, d'autre part, six nombres entiers, A, A', B, B', x, x', *satisfaisant aux conditions :*

$$Aa + Bb = Nx, \quad A'a' + B'b' = Nx'.$$

(*) Oy' et Oy'' désignent toujours les deux diamètres qui font avec leurs conjugués un angle α.

(**) Voir les mémoires de MM. de Longchamps et Pelz.

(***) Extrait de la *Revue scientifique*, 16 octobre 1886.

Digitized by Google

Cela posé, on a

$$AA' + BB' = \mathcal{M}\,(aa' + bb').$$

Des équations

$$aa' + bb' = N, \quad Aa + Bb = Nx,$$

on déduit :

$$a(A - a'x) + b(B - b'x) = 0.$$

Donc

$$A = a'x + b\theta, \quad B = b'x - a\theta; \qquad [1]$$

θ étant un entier quelconque, positif ou négatif.

De même,

$$A' = ax' + b'\theta', \quad B' = bx' - a'\theta'. \qquad [2]$$

Par conséquent,

$$AA' + BB' = N(xx' + \theta\theta'), \qquad [3]$$

II. Remarque. Si $N = f^2 + g^2$ (*) prenons $x' = x, \theta' = \theta$. L'égalité (3), devient

$$AA' + BB' = (f^2 + g^2)(x^2 + \theta^2),$$

ou

$$AA' + BB' = (fx \pm g\theta)^2 + (f\theta \mp gx)^2. \qquad [4]$$

Ainsi, dans ce cas particulier, *la quantité* $AA' + BB'$, *multiple de* N, *est une somme de deux carrés.*

III. Exemple. $N = 73, a = 3, b = 2, a' = 5, b' = 29, x = 7$.

On trouve :

$$A = 21 + 29\theta, \; B = 14 - 5\theta, \; A' = 35 + 2\theta, \; B' = 203 - 3\theta;$$

puis

$$AA' + BB' = 73(7^2 + \theta^2) = (56 \pm 3\theta)^2 + (21 \mp 8\theta)^2.$$

SUR LE NEUVIÈME NOMBRE PARFAIT;

par M. Éd. Lucas, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée S. Louis.

(Voir *Mathesis*, t. VI, pp. 100, 145, 178, 248).

M. Seelhoff, a démontré que le nombre $2^{61} - 1$ de dix-neuf chiffres est un nombre premier; c'est le plus grand nombre premier actuellement connu, et par suite le plus grand nombre parfait connu est

$$2^{60}(2^{61} - 1).$$

(*) Ce qui arrive, par exemple, si N est un nombre premier, ayant la *forme* $4\mu + 1$.

Digitized by Google

M. Jules Hudelot, de Montceau-les-Mines, vient de m'adresser une démonstration numérique basée sur le théorème suivant, que j'ai énoncé (*) :

On forme les nombres a_n

$$4, 14, 194, \ldots$$

tels que chacun d'eux est le carré du précédent diminué de deux unités, et l'on prend le reste de la division par $A = 2^{4q+1} - 1$, *lorsque le résultat obtenu dépasse le nombre* A. *Le nombre* A *est premier si* a_{4q} *est nul.*

Le tableau suivant contient les résidus des nombres a de 10 en 10 suivant le module $2^{61} - 1$.

$$a_{10} \equiv 1337\ 19807\ 68204\ 36604,$$
$$a_{20} \equiv 0720\ 44200\ 68287\ 44208,$$
$$a_{30} \equiv 0505\ 07113\ 26578\ 82993,$$
$$a_{40} \equiv 0361\ 04443\ 51992\ 27874,$$
$$a_{50} \equiv 1072\ 61347\ 24779\ 48613,$$
$$a_{60} \equiv 0000\ 00000\ 00000\ 00000.$$

Ce travail, fait en 54 heures, renferme plus de 70000 chiffres admirablement alignés; c'est l'un des plus beaux mémoires numériques que j'aie jamais vus; je le présenterai au congrès de Toulouse.

J'ajouterai que M. Genaille me fabrique actuellement une machine qui permettra de vérifier les assertions de Mersenne, pour tous les nombres premiers qui n'ont pas plus de 150 chiffres.

P. S. M. Landry, avait affirmé depuis longtemps que $2^{61} - 1$ est un nombre premier, mais sa démonstration était indirecte, tandis que Mersenne le considérait comme non-premier.

×QUESTIONS DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

par M. Deprez, professeur à Dinant.

1. Les diagonales d'un quadrilatère sphérique ABCD inscrit dans un petit cercle se coupent en E. Démontrer la relation

$$\frac{\sin AE}{\sin CE} = \frac{\sin \frac{1}{2} AB \sin \frac{1}{2} AD}{\sin \frac{1}{2} CD \sin \frac{1}{2} CB}.$$

(*) *Récréations mathématiques*, tome II, p. 283.

Digitized by Google

On peut appliquer aux deux triangles ABD, CBD la formule

$$\operatorname{cotg} R = \frac{\cos \frac{1}{2} a \sin h}{2 \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}.$$

2. Trois arcs de grand cercle menés par un même point A d'un petit cercle rencontrent la circonférence de ce dernier cercle en B', M', C', et rencontrent un grand cercle quelconque en B, M, C. Démontrer la relation

$$\sin AB \sin CM \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} AB' + \sin AC \sin BM \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} AC' = \sin AM \sin BC \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} AM'.$$

Cette égalité résulte de la formule

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} AB' . \sin C'AM' + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A'C' . \sin B'AM' = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} AM' . \sin B'AC'.$$

3. D'un point quelconque P de la sphère, on mène un arc transversal rencontrant un petit cercle (pôle O) en A et B. Soient α, β les distances de P aux tangentes menées par A et B, r le rayon du petit cercle. Démontrer que

$$\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} = \frac{2 \sin r \cos PO}{\sin^2 PO - \sin^2 r}.$$

4. Soient ABC, A'B'C' deux triangles équilatéraux inscrits dans deux cercles concentriques (rayons sphériques r, r'), M et M' deux points de ces cercles. Démontrer que

$$\cos M'A + \cos M'B + \cos M'C = \cos MA' + \cos MB' + \cos MC' = 3 \cos r \cos r'.$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} AM + \sin^2 \tfrac{1}{2} BM + \sin^2 \tfrac{1}{2} CM = \tfrac{3}{2} \sin^2 r.$$

Voir question 516, *Mathesis*, t. VI, p. 238; on peut aussi appliquer les théorèmes sur le produit et le rapport des sinus des demi-diagonales d'un quadrilatère inscrit.

5. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c') les couples de côtés opposés d'un hexagone phérique inscrit, et a'', b'', c'' les diagonales joignant les sommets opposés. On a la relation (*)

$$\begin{vmatrix} -\sin \frac{1}{2} a'', & \sin \frac{1}{2} a', & \sin \frac{1}{2} c \\ \sin \frac{1}{2} a, & -\sin \frac{1}{2} b'', & \sin \frac{1}{2} b \\ \sin \frac{1}{2} c', & \sin \frac{1}{2} b', & -\sin \frac{1}{2} c'' \end{vmatrix} = 0.$$

6. Étant donné un triangle sphérique ABC, on décrit trois cercles tangents entre eux, chacun touchant deux côtés. Soient A', B', C' les

(*) Comparez N. A. M., (1) XVII (1858), p. 263.

Digitized by Google

points de contact mutuels de ces cercles. Démontrer que les arcs de grand cercle AA', BB', CC' concourent en un même point.

Les côtés des triangles ABC, A'B'C' concourent aux centres de similitude des trois cercles, centres qui sont sur un même grand cercle.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 354.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 159.)

Toute hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes d'une ellipse donnée rencontre celle-ci en quatre points tels que les six circonférences passant par deux de ces points et par le point de concours des tangentes menées à l'ellipse en ces points, se coupent en un même point.

(J. Neuberg.)

Proposons-nous de mener par un point donné Q (X,Y) une droite QM rencontrant une ellipse donnée sous un angle connu α. Si (x,y) sont les coordonnées du *point d'incidence* M, la condition du problème s'exprime par l'égalité

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{Y-y}{X-x}+\dfrac{b^2x}{a^2y}}{1-\dfrac{b^2x\,(Y-y)}{a^2y\,(X-x)}},$$

ou

$$(c^2xy - a^2Xy + b^2Yx)\operatorname{tg}\alpha + (a^2yY + b^2xX - a^2b^2) = 0. \qquad (1)$$

Cette équation, si (x, y) sont les coordonnées courantes, représente une hyperbole H dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse et qui rencontre celle-ci en quatre points M, M', M'', M''', tels que les droites MQ, M'Q, M''Q, M'''Q font l'angle α avec l'ellipse (*). Soit P le point de concours des tangentes en M, M'; le quadrilatère QMPM' sera inscriptible.

La proposition de la question 354 est donc démontrée, si l'on établit

---

(*) Pour obtenir la conique η dont il est question dans l'article de M. Schoute, il suffit de soustraire l'équation (1) de celle de l'ellipse donnée.

Digitized by Google

que l'hyperbole H peut coïncider avec une hyperbole quelconque dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse. Or, on peut déterminer X, Y, α de manière que l'équation (1) devienne identique à la suivante : $xy + Dy + Ex + F = 0$. (J. N.)

Question 488.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 263.)

D'un point, pris sur une strophoïde droite, on mène les deux tangentes à la courbe, autres que celle du point considéré. Démontrer que la corde des contacts enveloppe une parabole ayant même axe et même sommet que la strophoïde et son foyer symétrique du point double par rapport à ce sommet. (E. Fauquembergue.)

Solution par M. V. Jamet(*). 1° La propriété énoncée par M. Fauquembergue étant projective, je vais m'efforcer de l'étendre aux courbes unicursales du troisième ordre. A cet effet, je considérerai en premier lieu une courbe du troisième ordre telle que dans le premier membre de son équation, les axes étant rectangulaires, l'ensemble des termes de degré le plus élevé admette le facteur $x^2 + y^2$. Cette courbe, supposée unicursale, est, par rapport à son point double O, la transformée d'une conique par rayons vecteurs réciproques. Cette conique passe par le pôle de transformation, et les deux tangentes, menées d'un point P pris sur la cubique, à cette même cubique, se transforment en deux circonférences passant par l'origine, coupant la conique en un même point p, et tangentes à cette conique. Soient m et m' les deux points de contact; les tangentes en ces deux points doivent être l'une et l'autre antiparallèles à la droite Op par rapport aux axes de la conique, et par conséquent parallèles entre elles; donc la droite mm' est un diamètre de la conique, et les deux droites Om, Om' forment deux systèmes de rayons en involution, dont les rayons doubles sont parallèles aux asymptotes de la conique; car chaque asymptote d'une conique est un diamètre qui se confond avec son conjugué. Donc, sur la cubique, les

---

(*) Pour une étude plus complète du triangle PMM', on peut voir une intéressante Note sur la strophoïde par M. Lebel (*J. de Bourget, Math. Sp.*, 1886, p. 147.)

Nous publierons, dans une prochaine livraison, une solution géométrique de cette question, par M. Cl. Servais.

Digitized by Google

points de contact des tangentes issues du point P sont les extrémités de deux rayons vecteurs issus du point O, et formant une involution dont les rayons doubles sont les tangentes à la cubique, au point O.

2° Par la méthode des transformations homographiques, on en déduit le théorème suivant : « d'un point P, pris sur une courbe unicursale du troisième ordre, on lui mène deux tangentes, et l'on joint le point double O aux deux points de contact M, M'; les deux droites OM, OM' forment une involution dont les rayons doubles sont les tangentes au point O. »

3° Cela posé, si je veux chercher l'enveloppe de la droite MM', je prendrai pour axes de coordonnées deux rayons conjugués de l'involution formée par les droites OM, OM' et l'équation de la cubique sera

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + (Ex^2 + Fy^2)\,z = 0.$$

Soit en outre

$$ux + vy = wz$$

l'équation de la droite MM', et soit aussi N le troisième point d'intersection de la droite MM' avec la cubique. Les trois droites OM, OM', ON seront représentées par l'équation

$$w(Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3) + (Ex^2 + Fy^2)(ux + vy) = 0; \quad (1)$$

Soient m, m', m'' les coefficients angulaires de ces trois droites. Par hypothèse

$$mm' = -\frac{E}{F}.$$

Mais, d'après l'équation (1) :

$$mm'm'' = -\frac{Aw + Eu}{Dw + Fv};$$

donc

$$m'' = \frac{F}{E}\cdot\frac{Aw + Eu}{Dw + Fv}. \quad (2)$$

Donc l'équation (1) doit être vérifiée si l'on y remplace $\frac{y}{x}$ par le second membre de (2), ou si l'on y remplace x par $E(Dw + Fv)$, y par $F(Aw + Eu)$. Or l'équation (1) est identique à

$$(Aw + Eu)\,x^3 + (Hx + Ky)\,xy + (Dw + Fv)\,y^3 = 0,$$

H et K désignant des fonctions linéaires de u, v, w.

Si l'on opère la substitution indiquée, et qu'on supprime le facteur

Digitized by Google

commun $(Dw+Fv)(Aw+Eu)$, on trouve, pour l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée :

$$E^2(Dw+Fv)^2+HE^2F(Dw+Fv)+KF^2E(Aw+Eu)+F^2(Aw+Eu)^2=0,$$

équation homogène et du second degré par rapport à u, v, w. Donc l'enveloppe de la droite MM' est une courbe de seconde classe, partant une conique.

4° Si la cubique proposée est une strophoïde, on supposera

$$C=A,\quad D=B,\quad F=-E,$$
$$H=Bw+Ev,\quad K=Aw-Eu;$$

et l'équation tangentielle ci-dessus deviendra :

$$E(v^2-u^2)-Bvw-Auw=0.$$

Donc la droite MM' enveloppe une parabole, chaque fois que la cubique proposée est une strophoïde.

Si la strophoïde est droite, comme le suppose M. Fauquembergue, on peut faire, en outre, $B=0$, et la droite MM' se meut en touchant constamment la courbe définie par l'équation tangentielle

$$E(v^2-u^2)-Auw=0.$$

Celle-ci représente une parabole admettant l'axe des x pour axe de symétrie; car à chaque valeur de $\frac{w}{u}$, correspondent, en vertu de cette équation, deux valeurs égales et de signe contraire de $\frac{u}{v}$. On trouvera le sommet de la courbe, en déterminant celle des tangentes dont l'équation est de la forme $x=w$; c'est-à-dire en cherchant la valeur de w qui correspond à $u=1$, $v=0$; on trouve $w=\frac{-E}{A}$.

Pour trouver le foyer, on déterminera le point réel α, β, tel que l'une des tangentes issues de ce point ait pour équation :

$$x+y\sqrt{-1}=\alpha+\beta\sqrt{-1};$$

on trouvera :

$$-2E=A(\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$
$$\alpha=\frac{-2E}{A},\quad \beta=0.$$

Ces résultats concordent avec ceux énoncés par M. Fauquembergue.

5° Remarques. I. Le calcul développé au n° 3 ne suppose nullement

Digitized by Google

que dans l'équation de la cubique, le coefficient de xy soit nul; on peut donc dire que la droite MM' enveloppe une conique, alors même que les rayons doubles de l'involution ne coïncident pas avec les tangentes au point double.

II. En cherchant l'enveloppe du cercle mobile, défini au n° 1, on eût trouvé une inverse de parabole; et en appliquant la méthode des transformations homographiques, on eût pu en conclure le théorème suivant : « Par un point P mobile sur une conique (*c*), par un point O situé sur cette conique, et par deux points A, B, fixes dans son plan, on peut faire passer deux coniques tangentes à (*c*); la droite qui joint les points de contact passe par un point fixe, et la conique qui passe par les deux points de contact et les trois points fixes A, B, O, enveloppe une courbe unicursale du quatrième ordre dont A, B, sont deux points doubles, et dont O est un point de rebroussement. »

Nantes, 8 décembre 1885.

Question 514.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 96.)

A un cercle donné, on inscrit une suite de rectangles dont les côtés ont des directions données. Trouver le lieu du pôle d'une droite donnée par rapport à une conique circonscrite à l'un de ces rectangles et semblable à une conique donnée. (H. Brocard.)

Solution par MM. Verniory et Klompers. La question revient à chercher le lieu du pôle d'une droite fixe représentée par

$$mx + ny = 1, \tag{1}$$

par rapport à une série de coniques concentriques et homothétiques. Ces courbes ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = K^2,$$

où K est un paramètre variable; on trouve, en identifiant l'équation (1) avec celle de la polaire du point (X, Y),

$$m = \frac{X}{K^2 a^2}, \quad n = \frac{Y}{K^2 b^2}.$$

Digitized by Google

D'où, en éliminant K,

$$Y = \frac{b^2 n}{a^2 m} X;$$

le lieu cherché est donc une droite.

REMARQUE. Ce résultat s'aperçoit immédiatement, si l'on observe que les ellipses variables peuvent être projetées suivant des circonférences concentriques, ou encore que le diamètre conjugué avec la droite donnée est invariable. (J. N.)

×Question 534.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 216.)

Deux circonférences ayant un point O *commun, on mène par ce point deux sécantes quelconques* OAA', OBB', *qui rencontrent en* A *et* B *la première circonférence, en* B *et* B' *la seconde. Sur* OAA' *on porte* OP = AA'; *sur* OBB', *on porte* OQ = BB'. *Sur* OP *et* OQ *on construit le parallélogramme* OPQV, *la droite* OV *rencontrant les circonférences en* X, X', *démontrer la relation*

$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = OV.XX'. \qquad \text{(LAISANT.)}$$

Nous avons reçu de bonnes solutions de cette question par MM. BLONDEEL, BEYENS (Cadix), DEPREZ, GOB, MINEUR, KLOMPERS, VERNIORY. Toutes sont fondées sur la propriété du produit des diagonales du quadrilatère inscriptible et sur la considération de triangles semblables. La suivante, due à M. GOB, se distingue par la simplicité de la rédaction.

1° Lorsque la sécante AA' tourne autour de O, le point P décrit une circonférence. En effet, si l'on projette les centres C, C' des circonférences données aux milieux a, a' des cordes OA, OA', et que l'on mène Cp égale et parallèle à la droite aa', le point p décrit la circonférence qui a pour diamètre CC'. De là on conclut que le point P parcourt la circonférence qui a pour diamètre la droite OC'' parallèle à CC' et égale à 2CC'. Cette circonférence coupera donc OV en un point R tel que OR = XX'.

2° D'après un théorème connu, si une circonférence passant par le sommet O d'un parallélogramme OPQV rencontre OP, OQ, OV en P', Q', V', on a

$$OP \cdot OP' + OQ \cdot OQ' = OV \cdot OV'.$$

Digitized by Google

Si cette circonférence passe par P et Q, on a

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = OV.OV';$$

donc, dans la question proposée :

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = OV.OR \quad \text{ou} \quad \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = OV.XX'.$$

Remarque. La droite OV est double de la médiane OD du triangle OPQ. Pour généraliser le théorème de M. Laisant, prenons pour D le point qui divise PQ dans le rapport $\overline{OP}^m : \overline{OQ}^m$. Alors

$$\overline{AA'}^{m-2} + \overline{BB'}^{m-2} = \frac{\overline{AA'}^m + \overline{BB'}^m}{\overline{AA'}^2 . \overline{BB'}^2} OD . XX''.$$

Si OD est la bissectrice ou la symédiane du triangle OPQ, on trouve respectivement

$$AA' . BB' = OD . XX',$$

$$\frac{1}{\overline{AA'}^2} + \frac{1}{\overline{BB'}^2} = \frac{2}{OD . XX'}. \qquad \text{(Deprez.)}$$

×Question 541.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 240.)

Soient A' *le point de contact de la base* BC *d'un triangle* ABC *avec le cercle inscrit* I, B' *et* C' *les projections de* B *et* C *sur le diamètre perpendiculaire à la bissectrice* AI. *Démontrer* 1° *que le cercle* BIC *touche* B'C'; 2° *que le cercle* B'A'C' *touche* BC. (Meurice.)

Solution par MM. Beyens (Cadix), Boedt (Ypres), Brasseur (Lierre), Laurens (Cambrai), Farisano (Naples), Verniory (Seraing), Deprez (Dinant), Klompers (Gand), Goldschmidt (Gand), Gob (Gand), Mosnat (Toulon).

1° La bissectrice AI rencontrant la circonférence ABC en D, on démontre facilement que les angles DBI, DIB ont même mesure; d'où DB = DC = DI. Donc I est le centre du cercle BIC, et B'C' est une tangente.

2° Dans le cercle BIC, les angles CIC' et IBC ont même mesure. Mais à cause des quadrilatères inscriptibles CA'IC', BA'IB', on a

$$\text{angle } CIC' = C'A'C = IBA' = IB'A'.$$

Digitized by Google

Il en résulte que

$$\textit{angle } C'A'C = C'B'A',$$

donc BC touche le cercle B'A'C'.

Remarque. Soient I_a, I_b, I_c les centres des cercles exinscrits. Le cercle BIC passe par I_a et touche en I_a une perpendiculaire à AI_a; les projections de B et C sur cette perpendiculaire, et celle de I_a sur BC sont sur une circonférence touchant BC.

Les quatre points A, C, I_a, I_c sont sur une circonférence dont le centre est au milieu de la droite I_aI_c et sur la circonférence ABC. Les projections de A et C sur une perpendiculaire menée par I_a sur I_aI_c et celle de I_a sur AC sont sur un cercle tangent à AC. (Deprez.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

304. Déterminer x par l'une des équations

$$\cos(a - x) - \cos(a + x) = m \sec \tfrac{1}{2}(a - x) \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(a + x),$$

$$\sin^2 x = \cos(a + 2x) + \sin(a + 2x)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 8.$$

305. Quel que soit l'entier n, le nombre

$$2n^6 - n^4 - n^2$$

est divisible par 36. (de Rocquigny.)

306. Si d'un point A, extérieur à une droite, on mène à cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE dont les longueurs croissent successivement d'une même quantité, les distances BC, CD, DE vont en diminuant. (École forestière de France, 1886.)

La médiane AM du triangle ABD est moindre que $\frac{1}{2}(AB + AD)$ ou $\frac{1}{2}AC$, etc.

307. Le volume d'une tranche sphérique limitée par deux plans parallèles situés du même côté du centre est équivalent à la différence entre le cylindre ayant même hauteur que la tranche et pour base un grand cercle de la sphère, et le tronc de cône de même hauteur dont les bases auraient pour rayons les distances du centre de la sphère aux deux plans qui limitent la tranche. (École forestière, 1886.)

308. Une personne contracte un emprunt remboursable au moyen de deux annuités de fr. 1061.80, on a calculé qu'il serait aussi avantageux pour elle de payer quatre annuités de fr. 561.80. A combien évalue-t-on le taux de l'intérêt? Le premier paiement s'effectue un an après le jour de l'emprunt. (École forestière, 1886.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**556.** Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Δ; soient A', B', C' les points qui, sur Δ, sont diamétralement opposés, respectivement, aux sommets A, B, C. La tangente en A' rencontre AB en A'', AC en A'''. On obtient ainsi six points

$$A'',\ A'''\ ;\ B'',\ B'''\ ;\ C'',\ C'''\ ;$$

Démontrer que le triangle A''B''C'' est équivalent au triangle A'''B'''C'''. (G. DE LONGCHAMPS.)

×**557.** Soit M un point quelconque du plan d'un triangle ABC. Désignons par P_{ab} la puissance du sommet A par rapport au cercle qui a pour diamètre la droite BM. On demande

1° De trouver deux points M, M' satisfaisant respectivement aux égalités

$$P_{ab} = P_{bc} = P_{ca},\quad P_{ba} = P_{cb} = P_{ac},$$

et de démontrer qu'ils sont symétriques par rapport au centre O du cercle ABC;

2° de prouver que le point M déterminé par les conditions

$$P_{ab} + P_{ac} = P_{bc} + P_{ba} = P_{ca} + P_{cb}$$

est symétrique du centre de gravité G par rapport à O et en ligne droite avec le point de Steiner et le réciproque de l'orthocentre. (E. LEMOINE.)

558. On donne sur un plan deux ellipses (O, O'). Soient X, X' deux points quelconques de ces courbes ayant même anomalie excentrique. Trouver le lieu du point Z tel que le triangle ZXX' soit sembable à un triangle donné. (LAISANT.)

L'anomalie excentrique d'un point M est l'angle MPA du rayon vecteur FM partout du foyer avec le grand axe FA.

×**559.** Connaissant l'angle A d'un triangle, le côté opposé BC et l'angle φ compris entre les droites joignant A aux points D, E qui divisent BC en trois parties égales, calculer les angles B et C. Examiner le cas particulier où $A = \frac{1}{2}\pi$.

Généraliser la question en supposant que DE est l'une quelconque des n parties égales dans lesquelles BC est divisé. (MARCUS BAKER.)

×**560.** Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^3 + y^3 = (x - y)^3 \qquad \text{(DE ROCQUIGNY.)}$$

Digitized by Google

SUR LES POINTS COMPLÉMENTAIRES;

par M. Ém. Vigarié, élève de l'École des Mines (Paris).

(Suite; voir *Mathesis*, t. VII, p. 6.)

II. Point de Nagel.

Bibliographie(*). — 1. 1836. Nagel. Recherches sur les cercles du plan d'un triangle.

2. 1860. Nagel (D'après). Théorèmes sur les cercles qui touchent les côtés d'un triangle (N. A. M. (1) XIX, 354-355 et 438-440).

3. 1864. Harnischmacher. Sur un nouveau point remarquable du triangle (*Archives de Grunert*, pp. 90-94).

4. 1871. Hochheim. Sur le cinquième point remarquable (*Archives de Grunert*, t. LII, pp. 26-40).

5. 1883. E. Lemoine. Sur de nouveaux points remarquables du plan d'un triangle (*Bourget, Math. spéc.*, pp. 3, 24, 49).

6. 1883-84. E. Lemoine. Exercices divers de mathématiques élémentaires (*Bourget, Math. él.*, exercices 4 et 27).

7. 1884. H. Brocard. Hyperbole des neuf points (*Ibid.*, pp. 197-209).

8. 1885. de Longchamps. Question proposée, 94 (*Ibid.*, pp. 92-95).

9. 1885. G. Boubals. Questions proposées 178, 186, 195 (*Ibid.*, pp. 95, 168, 216).

10. 1885. E. Lemoine. Sur les points associés d'un point du plan d'un triangle (*Bourget, Math. spéc.*, pp. 193, 217, 241).

11. 1886. E. Lemoine. Sur quelques points remarquables du plan d'un triangle (*Ibid.*, pp. 9-11).

12. 1886. Vigarié. Sur le point de Nagel (*Bourget, Math. él.*, p. 158).

7. Soient I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, et α, β, γ les points de contact de ce cercle avec les côtés. On sait que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en un même point Γ, appelé *point de Gergonne* du triangle ABC. Ce point a pour coordonnées barycentriques

$$\frac{1}{p-a}, \quad \frac{1}{p-b}, \quad \frac{1}{p-c}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}A, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}B, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}C.$$

(*) Les renseignements sur le mémoire de M. Hochheim nous ont été communiqués par M. Brocard, que nous remercions d'avoir eu l'obligeance de nous envoyer l'analyse de ce travail.

Pour les renvois aux mémoires cités dans la bibliographie, nous indiquerons seulement le nom de l'auteur et le numéro d'ordre de l'article.

Digitized by Google

et pour coordonnées normales

$$\frac{1}{a(p-a)}, \quad \frac{1}{b(p-b)}, \quad \frac{1}{c(p-c)}, \quad \text{ou} \quad \text{séc}^2\frac{1}{2}A, \quad \text{séc}^2\frac{1}{2}B, \quad \text{séc}^2\frac{1}{2}C.$$

Soient I_a, I_b, I_c les centres des cercles exinscrits à ABC, et $(\alpha_a, \beta_a, \gamma_a)$, $(\alpha_b, \beta_b, \gamma_b)$, $(\alpha_c, \beta_c, \gamma_c)$ les points où ces cercles touchent les côtés de ABC.

Nous appelons *point de Nagel*(*) *de* ABC, *le point de concours des droites* $A\alpha_a$, $B\beta_b$, $C\gamma_c$ *joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés avec les cercles exinscrits correspondants*. Nous le désignerons par la lettre ν.

Les points α_a, β_b, γ_c étant les isotomiques des points α, β, γ, on voit que *le point de Nagel est le réciproque du point de Gergonne*(**).

8. Les coordonnées barycentriques de ν sont

$$-a+b+c, \ldots \quad \text{ou} \quad \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}A, \ldots,$$

et les coordonnées normales :

$$\frac{p-a}{a}, \cdots, \quad \text{ou} \quad \text{coséc}^2\frac{1}{2}A, \cdots$$

Les premières expressions montrent que ν est l'anticomplémentaire du point (a, b, c). Donc *le point de Nagel est l'anticomplémentaire du centre* I *du cercle inscrit à* ABC; autrement dit, *le point de Nagel est le centre du cercle inscrit au triangle* $A'_1B'_1C'_1$ *qu'on obtient en menant par* A, B, C, *des parallèles à* BC, CA, AB.

Cette relation étant fondamentale, il convient d'en donner une démonstration directe. La droite αI rencontre la circonférence I en un second point δ, situé sur la droite $A\alpha_a$; car Iδ et $I_a\alpha_a$ sont des rayons parallèles, de même sens, des cercles I et I_a, dont A est le centre de similitude

---

(*) La dénomination de *point de Hochheim* a été abandonnée. Voir VIGARIÉ, 12.

(**) D'après la nomenclature proposée par M. de Longchamps, deux points situés sur le même côté du triangle de référence sont dits *isotomiques*, lorsqu'ils sont symétriques par rapport au milieu de ce côté. Deux points sont *réciproques*, lorsque les droites qui les joignent à un même sommet de référence rencontrent le côté opposé en deux points isotomiques. Deux droites menées par un même sommet du triangle de référence et également inclinées sur la bissectrice de l'angle correspondant, prennent le nom de *droites isogonales*. Deux points sont *inverses*, lorsque les droites qui les joignent à un même sommet du triangle de référence sont isogonales.

Pour éviter la confusion du langage, nous adopterons dorénavant cette terminologie. (J. N.)

Digitized by Google

externe. Il résulte de là que la droite A_1I joignant les milieux des deux côtés du triangle $\alpha\beta\alpha_a$ est parallèle au troisième côté $A\alpha_a$. Donc, par rapport aux triangles semblables $A_1B_1C_1$ et ABC, les lignes A_1I et $A\alpha_a$, B_1I et $B\beta_b$, C_1I et $C\gamma_c$ sont des éléments homologues; d'où l'on déduit que les points I, G, ν sont en ligne droite et que $G\nu = 2IG$. I étant le centre du cercle inscrit à ABC, ν est le centre du cercle inscrit à $A'_1B'_1C'_1$ (*).

Soit i le centre du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$. Les quatre points ν, I, i, G sont en ligne droite, et

$$G\nu = 2IG, \quad Gi = \tfrac{1}{2}IG, \quad Ii = i\nu.$$

Ces relations segmentaires sont les mêmes que celles entre H, O, O_9, G. On en conclut que les droites iO_9, IO, $H\nu$ sont parallèles et proportionnelles aux nombres 1, 2, 4.

Les droites AI, $A'_1\nu$ sont parallèles et rencontrent BC en des points isotomiques; donc, *si par les points isotomiques des pieds des bissectrices intérieures d'un triangle on mène des parallèles à ces bissectrices, on obtient trois droites concourant au point de Nagel* (**).

9. Chacun des cercles exinscrits à ABC jouit de propriétés analogues à celles du cercle inscrit. Ainsi :

Les droites $A\alpha_a$, $B\beta_a$, $C\gamma_a$ concourent en un point Γ_a;
» $A\alpha_b$, $B\beta_b$, $C\gamma_b$ » » » » » Γ_b;
» $A\alpha_c$, $B\beta_c$, $C\gamma_c$ » » » » » Γ_c.

Les points Γ_a, Γ_b, Γ_c sont *les points de Gergonne des cercles exinscrits*, ou simplement *les adjoints du point de Gergonne* (***).

(*) Comparer LEMOINE, 5, théorème XI, p. 51; BROCARD, 7, p. 207; BOUBALS, 9, p. 168; DE LONGCHAMPS, 8, p. 92; NAGEL, 2, théorème I.

(**) Comparer LEMOINE, 6, Exercice IV, Remarque III. Cet exercice contient cette propriété assez curieuse de la droite $A'_1\nu$: On marque sur le côté BA deux points quelconques M, N, et sur le côté CA les points M', N' tels que $CM' = BM$, $CN' = BN$, les segments égaux étant du même côté de BC; les droites MN', M'N se coupent sur une droite fixe $A'_1\nu$.

(***) P étant un point quelconque du plan ABC, les conjuguées harmoniques des droites AP, BP, CP par rapport aux angles A, B, C forment un triangle $P_aP_bP_c$, tel que AP passe par P_a, BP par P_b, CP par P_c. Les points P_a, P_b, P_c sont les *associés* de P (Neuberg, Lemoine) ou les *algébriquement adjoints* de P (de Longchamps). Les points Γ_a, Γ_b, Γ_c ne sont pas associés dans ce sens au point Γ. C'est pourquoi nous nous servons du terme *adjoints*, l'expression *associés* conservant la signification qui vient d'être définie.

Digitized by Google

Les coordonnées barycentriques du *groupe de Gergonne* sont :

$$\Gamma \ldots \frac{1}{-a+b+c}, \frac{1}{a-b+c}, \frac{1}{a+b-c}, \text{ ou } \operatorname{tg}\frac{1}{2}A, \operatorname{tg}\frac{1}{2}B, \operatorname{tg}\frac{1}{2}C;$$

$$\Gamma_a \ldots \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{-a-b+c}, \frac{1}{-a+b-c}, \text{ ou } -\operatorname{tg}\frac{1}{2}A, \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B, \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C;$$

$$\Gamma_b \ldots \frac{1}{-a-b+c}, \frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a-b-c}, \text{ ou } \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A, -\operatorname{tg}\frac{1}{2}B, \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C;$$

$$\Gamma_c \ldots \frac{1}{-a+b-c}, \frac{1}{a-b-c}, \frac{1}{a+b+c}, \text{ ou } \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A, \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B, -\operatorname{tg}\frac{1}{2}C.$$

Pour passer des coordonnées de Γ à celles de Γ_a, Γ_b, Γ_c, il suffit de changer respectivement a en $-a$, b en $-b$, c en $-c$.

On a trois autres systèmes de trois droites concourantes :

Les droites $A\alpha_a$, $B\beta_c$, $C\gamma_b$ concourent en un point ν_a;

» $A\alpha_c$, $B\beta_b$, $C\gamma_a$ » » ν_b;

» $A\alpha_b$, $B\beta_a$, $C\gamma_c$ » » ν_c.

Les points ν_a, ν_b, ν_c sont les réciproques des points Γ_a, Γ_b, Γ_c; nous les appellerons *adjoints du point de Nagel*. *Le groupe de Nagel* a pour coordonnées barycentriques :

$$\nu : p-a,\ p-b,\ p-c, \text{ ou } \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A,\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B,\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C;$$

$$\nu_a : -p,\ p-c,\ p-b, \text{ ou } -\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C;$$

$$\nu_b : p-c,\ -p,\ p-a, \text{ ou } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A,\ -\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C;$$

$$\nu_c : p-b,\ p-a,\ -p, \text{ ou } \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B,\ -\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}C.$$

Les complémentaires de ces points ont pour coordonnées :

$$a, b, c;\quad -a, b, c;\quad a, -b, c;\quad a, b, -c.$$

Il résulte de là : 1° que les points ν, ν_a, ν_b, ν_c sont les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle $A'_1B'_1C'_1$ (*); 2° que les deux groupes ν, ν_a, ν_b, ν_c et I, I_a, I_b, I_c sont homothétiques par rapport au centre de gravité G.

10. La définition des groupes de Gergonne et de Nagel montre que :

ν_a est situé sur $A\alpha$, ν_b sur $B\beta$, ν_c sur $C\gamma$;

Γ_a » $A\alpha_a$, Γ_b sur $B\beta_b$, Γ_c sur $C\gamma_c$.

(*) Les points ν, ν_a, ν_b ν_c, sont donc algébriquement associés par rapport au triangle $A'_1B'_1C'_1$.

Digitized by Google

Donc : 1° *Le triangle* ABC *est homologique avec le triangle des adjoints du point de Nagel, le centre d'homologie étant le point de Gergonne.*

2° *Le triangle* ABC *est homologique avec le triangle des adjoints du point de Gergonne, le centre d'homologie étant le point de Nagel.*

Semblablement, ABC est homologique avec chacun des triangles $\nu\nu_c\nu_b$, $\nu_c\nu\nu_a$, $\nu_b\nu_a\nu$, $\Gamma\Gamma_c\Gamma_b$, $\Gamma_c\Gamma\Gamma_a$, $\Gamma_b\Gamma_a\Gamma$; les centres d'homologie sont, respectivement, Γ_a, Γ_b, Γ_c, ν_a, ν_b, ν_c.

11. Ces relations d'homologie conduisent à des propositions fort curieuses, si l'on change le triangle de référence. Pour plus de clarté, nous commençons par rappeler quelques propositions connues.

Soient H l'orthocentre et A_A, B_A, C_A les pieds des hauteurs du triangle fondamental ABC. Les quatre points A, B, C, H sont tels que chacun est l'orthocentre du triangle des trois autres points, les pieds des hauteurs étant toujours A_A, B_A, C_A. Les quatre triangles ABC, HCB, CHA, BAH ont donc même *triangle orthique*(*) $A_AB_AC_A$ et jouissent, par rapport à ce dernier, des mêmes propriétés. Nous citons particulièrement les théorèmes suivants :

1° Les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, sur les côtés correspondants B_AC_A, C_AA_A, A_AB_A du triangle orthique concourent au centre O du cercle circonscrit à ABC.

Pareillement, les perpendiculaires abaissées des points H, C, B respectivement sur les droites B_AC_A, C_AA_A, A_AB_A concourent au centre O_a du cercle circonscrit au triangle HCB.

Les quatre droites HO, AO_a, BO_b, CO_c ont pour milieu commun le centre O_9 du cercle $A_AB_AC_A$.

2° Les droites joignant les sommets A, B, C aux milieux des côtés correspondants du triangle orthique concourent au point de Lemoine K du triangle ABC.

De même, les droites qui joignent les points H, B, C respectivement aux milieux des droites B_AC_A, C_AA_A, A_AB_A concourent au point de Lemoine K_a du triangle HCB.

3° Les côtés homologues des triangles ABC, $A_AB_AC_A$ se coupent en trois points A'_A, B'_A, C'_A situés sur l'axe radical des cercles ABC, $A_AB_AC_A$; cette

---

(*) Le terme de *orthocentre* est très-bien choisi. Mais pour désigner le triangle des pieds des hauteurs, il est plus simple de dire *triangle orthique*, au lieu de *triangle orthocentrique*. (J. N.)

Digitized by Google

droite, qu'on pourrait appeler *axe orthique* de ABC, est perpendiculaire à la ligne des centres OO_9H des deux cercles.

De même, les points de rencontre de BH avec A_hC_h, de CH avec A_hB_h et de BC avec C_hB_h sont sur une droite perpendiculaire à AO_9O_a.

12. Si I, I_a, I_b, I_c sont les centres des quatre cercles touchant les trois côtés du triangle ABC, les quatre triangles $I_aI_bI_c$, II_cI_b, I_cII_a, I_bI_aI ont même triangle orthique ABC; pour abréger le langage, on peut dire que ce sont les *triangles antiorthiques* de ABC. Les théorèmes du § 11 sont donc susceptibles des énoncés suivants :

1° Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle antiorthique de ABC sur les côtés correspondants de celui-ci concourent au centre du cercle circonscrit au triangle antiorthique. Les quatre points ainsi obtenus sont symétriques des points I, I_a, I_b, I_c par rapport au centre du cercle ABC(*).

2° Les droites qui joignent les milieux des côtés du triangle ABC aux sommets correspondants de l'un de ses triangles antiorthiques concourent au point de Lemoine du triangle antiorthique.

3° L'axe d'homologie du triangle ABC et de l'un de ses triangles antiorthiques est perpendiculaire à la ligne des centres des cercles circonscrits aux deux triangles.

Autrement dit, les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC sont sur une droite perpendiculaire à OI ; les droites joignant les pieds de deux bissectrices intérieures sont respectivement perpendiculaires aux lignes OI_a, OI_b, OI_c(**). (*A continuer*).

NOTES MATHÉMATIQUES.

×1. *Partage d'une droite en moyenne et extrême raison.* Soit $AB = a$ une droite donnée. Menons $BC = 2a$ perpendiculaire à AB, puis divisons l'angle BAC en deux parties égales par la transversale AD, rencontrant BC en D; BD est le grand segment de AB, partagé en moyenne et extrême raison (WEIDENHOLZER, dans les *Archives de Mathématiques et de Physique* de Grunert, continuées par Hoppe, 1886, (2) IV, p. 106-107).

(*) Comparer NAGEL, 2, théorèmes III et IV.

(**) Voir *Mathesis*, t. II, p. 111.

Digitized by Google

×2. *Réalité des racines de l'équation en s.* Supposons que l'on ait simultanément

$$\begin{aligned} xs &= ax + hy + gz\,; & x's' &= ax' + hy' + gz'\,; \\ ys &= hx + by + fz\,; & y's' &= hx' + by' + fz'\,; \\ zs &= gx + fy + cz\,; & z's' &= gx' + fy' + cz'\,. \end{aligned}$$

En multipliant les équations respectivement par $x', y', z', -x, -y, -z$ et ajoutant, il vient

$$(s - s')(xx' + yy' + zz') = 0.$$

Si s est différent de s', on aura donc

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Soit, s'il est possible, $s = \lambda + \lambda'\sqrt{-1}$, $s' = \lambda - \lambda'\sqrt{-1}$.

Alors, dans tous les cas, on peut supposer

$$\begin{aligned} x &= l + l'\sqrt{-1}, & y &= m + m'\sqrt{-1}, & z &= n + n'\sqrt{-1}, \\ x' &= l - l'\sqrt{-1}, & y' &= m - m'\sqrt{-1}, & z' &= n - n'\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Par suite, l'égalité deviendrait

$$(l^2 + l'^2) + (m^2 + m'^2) + (n^2 + n'^2) = 0,$$

ce qui est absurde. On ne peut donc supposer s, s' imaginaires. La démonstration s'étend à plus de trois équations (A. Buchheim, *Messenger of Mathematics*, 1884, (2) XIV, 143-144).

3. *Nouvelle expression du rayon de courbure d'une courbe plane, par M.* E. Wasteels, *élève à l'école normale des sciences de Gand.* Soient $r = f(\theta)$ l'équation d'une courbe plane en coordonnées polaires, O l'origine, u l'angle du rayon vecteur r, dans la direction θ, avec la partie de la tangente au point $M(r, \theta)$, qui est du côté des θ croissants.

Appelons $(\theta + \Delta\theta, r + \Delta r)$ les coordonnées du point M' voisin de M, $\Delta\theta$ étant supposé positif, et soient $u + \Delta u$ l'angle analogue à u, en M', T le point de rencontre des tangentes.

Si le quadrilatère OMTM' est convexe, les angles auront pour valeurs

$$MOM' = \Delta\theta,\quad OMT = \pi - u,\quad MTM' = \pi - \varepsilon,\quad TM'O = u + \Delta u,$$

ε étant l'angle des deux tangentes qui tend vers zéro, quand M' tend vers M. En exprimant que la somme des quatre angles est 2π, on trouve

$$\varepsilon = \Delta\theta + \Delta u.$$

Digitized by Google

Si le quadrilatère a un angle rentrant en T, on aura

$$MOM' = \Delta\theta,\ OMT = \pi - u,\ MTM' = \pi + \varepsilon,\ TM'O = u + \Delta u,$$

puis

$$-\varepsilon = \Delta\theta + \Delta u,$$

Divisant les deux membres par l'arc $\Delta s = MM'$ (s est supposé croissant avec θ), il vient

$$\pm\frac{\varepsilon}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} + \frac{\Delta u}{\Delta s},$$

et, à la limite, en désignant par ρ le rayon de courbure, par N la normale polaire,

$$\pm\frac{1}{\rho} = \frac{1}{N} + \frac{du}{ds} = \frac{\sin u}{r} + \frac{\cos u\, du}{\cos u\, ds} = \frac{\sin u}{r} + \frac{d\sin u}{dr}.$$

Corollaire. On ne peut avoir $\rho = N$ que si u est constant, c'est-à-dire si la courbe est une spirale logarithmique ou un cercle.

DIVERS ÉNONCÉS D'UNE PROPRIÉTÉ UNIQUE;

par M. LAISANT, député, à Paris.

On sait que, si l'on pose

$$u = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (1)$$

α, β, γ étant des quantités imaginaires constantes et z une quantité réelle variable, l'extrémité de la variable u parcourt une circonférence (*).

Plus généralement, si z est une variable imaginaire dont l'extrémité parcourt une figure, l'extrémité de u parcourt une figure inverse (après déplacement et retournement convenables).

Je me propose d'interpréter cette propriété et d'en tirer quelques conséquences des plus simples.

I. Posons (**)

$$\beta = OB,\ \delta = OD,\ \alpha = BA,\ \gamma = DC,\ u = OU;$$
$$BA' = z.BA,\ DC' = z.DC.$$

(*) Voir *Mathesis*, t. I, pp. 123 et 127.

(**) Dans le calcul des équipollences (Algèbre directive), l'imaginaire $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ est représentée par une droite MN dont l'origine M est *quel-*

Digitized by Google

Lorsque z est réel, A′ et C′ sont deux points qui divisent BA, DC dans un même rapport $z : 1 - z$. Prenons aussi sur la droite d'inclinaison nulle, menée par O, une longueur OI égale à l'unité. L'égalité (1) devient

$$\frac{OU}{OI} = \frac{OA'}{OC'}.$$

D'où ce théorème :

Soient BA, DC, *deux droites quelconques dans un plan, divisées proportionnellement en* A′, C′; *soit* OI *une droite fixe. Sur* OI *on construit le triangle* OIU *directement semblable à* OC′A′. *Quand les points* A′, C′ *se déplacent, le lieu décrit par le point* U *est aussi une circonférence.*

II. La relation (1) est de la forme

$$u = \varepsilon \frac{z - \mu}{z - \nu}, \quad \text{ou} \quad \frac{OU}{OE} = \frac{OZ - OM}{OZ - ON} = \frac{ZM}{ZN},$$

si OE, OM, ON, OZ représentent les imaginaires ε, μ, ν et la variable réelle z; le point Z parcourt la droite, d'inclinaison nulle, menée par O. Cela nous donne immédiatement le théorème suivant :

Soient M, N *deux points fixes et* OE *une droite fixe dans un plan*; Z *un point mobile qui parcourt une droite. On construit le triangle* OEU *directement semblable à* ZNM. *Le lieu du point* U *est une circonférence.*

III. Enfin, comme on établit séparément : 1° que l'extrémité de u parcourt une circonférence, lorsque z est réel; 2° que les figures décrites par les extrémités des variables u et z sont inverses; il résulte encore de la proposition rappelée au début de cette note la démonstration de cette propriété connue : *La figure inverse d'une droite est une circonférence.*

Les trois énoncés I, II, III semblent bien différents à la lecture; et cependant, ils ne sont, on le voit, que la traduction géométrique d'une même vérité.

Ce n'est peut-être pas l'un des moindres avantages du calcul des équipollences, que de permettre ainsi de voir très rapidement plusieurs des aspects géométriques d'une même question; c'est une suite du lien continuel qui unit les figures aux opérations du calcul, le calcul n'étant ici que la traduction fidèle et précise des faits géométriques.

---

conque, qui fait avec un axe fixe OX un angle égal à l'argument φ et qui a une longueur égale au module ρ. M. Laisant vient de faire paraître un excellent traité intitulé : *Théorie et Applications des Équipollences*, dont nous rendrons compte dans *Mathesis*. (J. N.)

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Traité élémentaire des Déterminants, contenant 299 exercices, par L. LEBOULLEUX, licencié ès-sciences, professeur de mathématiques à l'Université de Genève. Paris, Delagrave; Bruxelles, J. Decq; Genève, Stapelmohr, 1884. Un volume in-8° de VII-183 pages. Prix : 3 francs.

I. « Le traité de M. Leboulleux est conçu dans le même esprit que celui de M. Mansion, sur le même sujet. Comme celui-ci, il n'aborde pas immédiatement la théorie générale des déterminants telle qu'on l'expose ordinairement dans les cours de mathématiques spéciales, en attaquant de prime abord le tableau de n^2 éléments. Le lecteur se familiarise peu à peu avec l'idée du déterminant et avec les principes du calcul algébrique correspondant, par de nombreux exercices sur les déterminants à 4 ou à 9 éléments.

« Le livre de M. Leboulleux renferme un très grand nombre d'exercices accompagnés, dans la plupart des cas, d'une solution développée ou tout au moins indiquée. Nous recommandons particulièrement cet ouvrage à ceux qui, placés loin d'un enseignement technique, éprouveraient quelque difficulté à s'assimiler l'esprit de ce puissant algorithme, qui constitue aujourd'hui la base de notre enseignement classique (G. DE LONGCHAMPS, *Journal de Mathématiques élémentaires*, 2e série, tome X, août 1886, p. 187). »

II. On peut regarder l'opuscule de M. Leboulleux comme un abrégé de la partie élémentaire du Manuel de M. Dostor, ou un développement de la partie correspondante de nos *Éléments*. Voici quelques observations que nous a suggérées la lecture de ce livre.

PRÉFACE. « Il y a peu d'ouvrages spéciaux sur les déterminants. » Cela est évidemment inexact. L'auteur, sans doute, n'a eu en vue que les ouvrages français (*).

CHAPITRE I. *Déterminants de quatre éléments*. N° 8. Résolution de deux équations linéaires. Il aurait fallu faire observer que les valeurs trouvées vérifient les équations données. N° 9. Les valeurs de x et de y telles que $a_2x + b_2y = 0$, sont évidemment proportionnelles à b_2 et $(-a_2)$; il est inutile de recourir aux formules du n° 8 pour l'établir. N°s 10 et 12. L'auteur ne cherche pas si la condition nécessaire trouvée est suffisante. Même remarque, relativement à l'exercice 32.

CHAPITRE II. *Déterminants de neuf éléments*. N°s 13, 14, 18. L'auteur définit un déterminant de neuf éléments au moyen des dérangements ou inversions (dans les permutations d'une seule série d'indices), ce qui est assez inutile, puisque immédiatement après, il fait connaître la règle pratique de Sarrus. La manière dont il faut compter le nombre des inversions pourrait être exposée plus clairement. N° 27. Dans la résolution des équations linéaires à trois inconnues, il aurait fallu démontrer que les valeurs trouvées vérifient les équations données. Une simple observa-

---

(*) Signalons à l'auteur, dans cette préface, deux fautes typographiques qu'il faudrait corriger à la plume : *Hernûte* pour *Hermite*, *Sylvestre* pour *Sylvester* (deux fois.)

Digitized by Google

tion ne suffit pas ici, comme au n° 8. Dans ce n° 27, l'auteur emploie les propriétés des mineurs sans les avoir signalées explicitement. N° 28. Résolution de trois équations linéaires à trois inconnues, dont une seule n'est pas homogène. Le résultat obtenu s'établit plus simplement par la considération des deux équations homogènes seulement, en ne s'appuyant que sur le n° 8 du chapitre précédent. N° 29. L'auteur aurait dû dire dans quel cas la condition nécessaire pour que trois équations linéaires à deux inconnues aient les mêmes solutions, est aussi suffisante. — Ce chapitre contient un grand nombre d'exercices élémentaires, dont quelques-uns sont très élégants (Ex. 81, 82, 83). Les exercices 43, 67, 69 sont identiques; 109 et 110 ne diffèrent pas essentiellement; la résolution des équations considérées dans ces exercices et dans 108, se fait d'ailleurs plus simplement par la méthode du plus grand commun diviseur.

Chapitre III. *Les déterminants de n^2 éléments.* Au n° 31, la parité ou l'imparité d'une permutation est définie au moyen des inversions des lettres qui y entrent, sans considération des indices, qui sont supposés rangés dans l'ordre naturel; au n° 37, interviennent, de plus, les inversions des indices; mais dans la définition du déterminant, l'auteur revient, à tort selon nous, à la définition restreinte du n° 31. N°s 48 et 49 : La démonstration des théorèmes relatifs au changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes et à l'échange des deux colonnes nous semble insuffisante, comme dans maints traités sur la matière. N°s 77-78. Même défaut qu'aux n°s 27, 28, 29. Parmi les exercices de ce chapitre, nous signalons la belle identité (Ex. 148.)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Chapitre IV. *Opérations sur les déterminants.* Ce chapitre contient la décomposition des déterminants dont les éléments sont des polynômes, en déterminants partiels, le principe de l'addition des lignes, la règle de la multiplication (d'une manière écourtée) et de nombreux exercices élémentaires. Selon nous, le principe de l'addition des lignes, si éminemment utile au point de vue du calcul pratique des déterminants, aurait dû être exposé, bien antérieurement, dans chacun des chapitres précédents.

En résumé, le livre de M. Leboulleux peut être recommandé aux élèves comme une introduction facile à la théorie des déterminants et comme recueil d'exercices; mais sur les points délicats de cette doctrine (échange des lignes avec les colonnes; échange de deux lignes; vérification des valeurs trouvées pour les inconnues dans les équations linéaires; élimination) il devra être soumis à une révision sévère quand on en publiera une seconde édition. (P. M.).

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

×Question 288(**).

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 232.)

Si p désigne un nombre premier, déterminer le plus petit nombre n pour lequel le produit des n premiers nombres soit divisible par p^λ. (E. Lucas.)

Posons

$$S_m = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m,$$

et désignons par $\psi(n)$ l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise le produit 1.2.3... n. On sait que

$$\psi(p^m) = p^{m-1} + p^{m-2} + \cdots + 1 = S_{m-1},$$

et si a est un nombre entier plus petit que p :

$$\psi(ap^m) = ap^{m-1} + ap^{m-2} + \cdots + a = aS_{m-1}.$$

Formons maintenant les sommes S_1, S_2, ... Si l'une d'elles S_{m-1} est égale à λ, la solution de la question est $n = p^m$. Si λ est compris entre S_{m-1} et S_m, et égal à un multiple aS_{m-1} de la première somme, on prendra $n = ap^m$. Supposons λ compris entre aS_{m-1} et $(a+1)S_{m-1}$, et soit $\lambda' = \lambda - aS_{m-1}$. Alors si n avait la forme $ap^m + bp^{m'}$, m' étant plus petit que m et b plus petit que p, on aurait

$$\psi(ap^m) + \psi(bp^{m'}) = aS_{m-1} + bS_{m'-1} = \lambda,$$

ou

$$bS_{m'-1} = \lambda'.$$

Cela nous conduit à chercher le plus grand des nombres S_1, S_2, ... contenus dans λ', supposons qu'il soit $S_{m'-1}$; déterminons ensuite le plus grand multiple de ce nombre $S_{m'-1}$ contenu dans λ', à moins que λ' ne soit un multiple exact de $S_{m'-1}$. Si la dernière hypothèse n'a pas lieu et que l'on ait $\lambda' > bS_{m'-1}$ et $< (b+1)S'_{m'-1}$, n sera compris entre $ap^m + bp^{m'}$ et $ap^m + (b+1)p^{m'}$. Nous pouvons alors essayer la valeur

$$(1) \qquad n = ap^m + bp^{m'} + cp^{m''}, \quad (m'' < m', c < p).$$

Après avoir calculé $\lambda'' = \lambda' - bS_{m'-1}$, nous cherchons le plus grand

---

(*) La question 534 (v. p. 53) a été également résolue par M. Meurice ; la question 541 (v. p. 54), par M. Thiry.

(**) Un abonné nous avait adressé une solution incomplète de la question.

Digitized by Google

$S_{m''-1}$ des nombres S_1, S_2, ... contenu dans λ'', puis le plus grand multiple $cS_{m''-1}$ de ce nombre contenu dans λ''. Si l'on avait exactement $cS_{m''-1} = \lambda''$, la solution serait donnée par (1). Dans le cas contraire, on calculera la différence $\lambda''' = \lambda'' - cS_{m''-1}$, et l'on déterminera le plus grand $S_{m'''-1}$ des nombres S contenu dans λ'', puis le multiple $dS_{m'''-1}$ de ce nombre égal ou immédiatement inférieur à λ'''; n sera égal à $ap^m + bp^{m'} + cp^{m''} + dp^{m'''}$ ou compris entre ce nombre et $ap^m + bp^{m'} + cp^{m''} + (d+1)p^{m'''}$.

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on trouve un nombre λ^{IV}, λ^{V}, ... de la forme gS_{q-1} ($g < p$) ou de la forme $gS_{q-1} + h$ ($g < p$, $h < p$); alors

$$n = ap^m + bp^{m'} + cp^{m''} + \cdots + gp^q$$

ou

$$n = ap^m + bp^{m'} + cp^{m''} + \cdots + gp^q + hp. \qquad \text{(J. N.)}$$

Question 369.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 200.)

Chercher le lieu des centres des coniques passant par trois points donnés A, B, C, ***dont l'un*** A ***est un sommet de la courbe.*** (SCHOUTE.)

Solution par MM. DEPREZ *et* VERNIORY. Prenons pour axes AC et AB, et posons $AC = c$, $AB = b$. En exprimant que la courbe passe par les points A, B, C, on trouve pour équation

$$my^2 + xy + nx^2 - mby - ncx = 0.$$

Le centre O satisfait aux égalités

$$y + 2nx - nc = 0, \quad x + 2my - mb = 0. \qquad [1]$$

Les coefficients angulaires de la tangente en A et du diamètre AO sont

$$\lambda = -\frac{nc}{mb}, \quad \lambda' = \frac{y}{x};$$

en les introduisant dans la condition de perpendicularité, savoir :

$$1 + (\lambda + \lambda')\cos\omega + \lambda\lambda' = 0,$$

on trouve

$$bmx - cny + (bmy - cnx)\cos\omega = 0. \qquad (2)$$

Il reste à éliminer m et n entre les équations (1) et (2); on obtient

$$bx^2\left(\tfrac{1}{2}c - x\right) - cy^2\left(\tfrac{1}{2}b - y\right) + xy(cy - bx)\cos\omega = 0.$$

Digitized by Google

Le lieu cherché est donc une cubique ayant un point double en A et passant par les milieux de AC et AB (*).

Solution géométrique par M. Mosnat (Toulon). Une droite quelconque Ax ne renferme qu'un point du lieu, qui est le centre de la conique passant par A, B, C et par les symétriques des points B et C par rapport à Ax. Cependant, si Ax coïncide avec la bissectrice de l'un des angles formés par AB et AC, la conique se réduit aux droites AB, AC. Donc le lieu demandé est une cubique ayant un point double en A et pour tangentes en ce point les bissectrices de l'angle BAC.

Question 389.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 246.)

On considère toutes les paraboles passant par A *et* B *et telles que les tangentes en ces points se coupent en un point quelconque* M *d'une droite donnée* D. *Trouver :* 1° *le lieu du point de concours de la normale en* A *avec le diamètre qui passe par* B ; 2° *le lieu du point d'intersection de deux de ces paraboles, lorsque les tangentes menées par* A *et* B *à ces courbes partagent harmoniquement la distance de deux points* P *et* Q *donnés sur la droite* D. (J. Neuberg.)

Solution par M. Pisani. Prenons pour axes AB et la perpendiculaire au milieu O de AB. Nous posons AB = 2c et nous représentons la droite D par l'équation $y = mx + p$.

1° MO étant un diamètre, on a pour les équations de la normale en A et du diamètre mené par B :

$$y = -\frac{\alpha - c}{\beta}(x - c), \qquad y = \frac{\beta}{\alpha}(x + c),$$

avec la condition

$$\beta = m\alpha + p,$$

où (α, β) sont les coordonnées de M. L'élimination de α et β conduit à l'équation du lieu cherché, savoir :

$$py^2 - cxy + (mc + p)x^2 + c^2y - c^2(mc + p) = 0,$$

(*) Pour trouver les tangentes au point double, on peut exprimer que la droite représentée par $y = sx$ coupe la cubique en trois points confondus ; on trouve $s = \pm 1$.

Digitized by Google

Ce lieu est une parabole, lorsque

$$c^2 - 4pmc - 4p^2 = 0, \quad \text{ou} \quad p = \tfrac{1}{2}(mc \pm \sqrt{m^2c^2 + c^2}).$$

La droite D ayant alors pour équation

$$y = m(x + \tfrac{1}{2}c) \pm \tfrac{1}{2}c\sqrt{m^2 + 1},$$

l'on voit qu'elle enveloppe un cercle fixe.

2° Soient maintenant (α, β), (α_1, β_1) les coordonnées de P et Q, $\frac{m\alpha + n\alpha_1}{m+n}$ et $\frac{m\beta + n\beta_1}{m+n}$ celles du point M; l'équation d'une conique touchant MA et MB respectivement en A et en B est

$$[y - \mu(x - c)]\,[y - \mu'(x + c)] + \nu y^2 = 0,$$

μ et μ' ayant les valeurs

$$\mu = \frac{m\beta + n\beta_1}{m(\alpha - c) + n(\alpha_1 - c)}, \quad \mu' = \frac{m\beta + n\beta_1}{m(\alpha + c) + n(\alpha_1 + c)}.$$

Pour que la courbe soit une parabole, on doit poser

$$(\mu + \mu')^2 - 4\mu\mu'(1 + \nu) = 0, \quad \text{ou} \quad \nu = \frac{(\mu - \mu')^2}{4\mu\mu'}.$$

En substituant les valeurs de ν, μ, μ', on trouve

$$(m\delta + n\delta_1)(m\varepsilon + n\varepsilon_1) + c^2(m+n)^2 y^2 = 0, \qquad (1)$$

pourvu que

$$\delta = y(\alpha - c) - \beta(x - c), \quad \delta_1 = y(\alpha_1 - c) - \beta_1(x - c),$$
$$\varepsilon = y(\alpha + c) - \beta(x + c), \quad \varepsilon_1 = y(\alpha_1 + c) - \beta_1(x + c).$$

Si dans l'équation (1), on regarde (x, y) comme étant les coordonnées d'un point déterminé N, on peut en déduire la valeur du rapport $m : n$ fixant le point correspondant M sur la droite PQ. Ce rapport ayant deux valeurs, il existe deux paraboles passant par les trois points A, B, N et telles que le pôle M de AB se trouve sur PQ. Pour que les deux pôles de AB divisent PQ harmoniquement, les deux valeurs de $m : n$ doivent avoir une somme nulle; donc

$$\delta\varepsilon_1 + \delta_1\varepsilon + 2c^2y^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu du point N. On peut l'écrire ainsi :

$$(\alpha y - \beta x)(\alpha_1 y - \beta_1 x) + c^2(\beta + \beta_1)y - c^2\beta\beta_1 = 0.$$

Digitized by Google

Elle représente une hyperbole passant par A et B, et dont les asymptotes sont parallèles aux droites OP, OQ.

La même question a été résolue par MM. Deprez, Gob et Bastin. Pour exprimer que deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) divisent harmoniquement le segment de deux autres points (α_1, β_1), (α_2, β_2), ces honorables correspondants se sont servis de la relation $(x_1 + x_2)(\alpha_1 + \alpha_2) - 2(x_1x_2 + \alpha_1\alpha_2) = 0$.

Question 488.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 263 et VII, p. 49.)

D'un point, pris sur une strophoïde droite, on mène les deux tangentes à la courbe, autres que celle du point considéré. Démontrer que la corde des contacts enveloppe une parabole ayant même axe et même sommet que la strophoïde et son foyer symétrique du point double par rapport à ce sommet. (E. Fauquembergue.)

Solution géométrique par M. Servais. Soient M et N deux points de la strophoïde en ligne droite avec le sommet A. Les tangentes en ces points rencontrent la courbe en deux points symétriques par rapport à l'axe. Soit μ le premier de ces points; la corde des contacts correspondante sera la droite MN', N' étant le symétrique du point N par rapport à l'axe. Soient H et K les points d'intersection de MN' avec l'axe et la tangente au sommet; m celui de la droite AM avec la circonférence décrite sur AO comme diamètre. On a

$$(N'HMK) = -1 = (Nm MA);$$

donc mH est perpendiculaire sur AO. Ensuite, soit P le milieu de NN'. Évidemment

$$\frac{AK}{NP} = \frac{Am}{Nm}, \quad NP = Nm;$$

par suite,

$$AK = Am.$$

Or

$$\overline{Am}^2 = AH \cdot AO;$$

donc

$$\overline{AK}^2 = AH \cdot AO.$$

Par conséquent, la perpendiculaire élevée au point K sur MN' passe par un point fixe qui est le symétrique de O par rapport à A. Donc, etc.

Construction du tangentiel du point M. C'est le point de rencontre des tangentes aux points M et N'.

Digitized by Google

Corollaire I. Le milieu de la corde des contacts décrit la parallèle à l'asymptote menée par le point double.

II. Le conjugué harmonique du point d'intersection de la corde des contacts avec l'axe décrit la tangente au sommet.

Généralisation. L'enveloppe des cordes des contacts des tangentes issues d'un point d'une cubique nodale est une conique.

En effet, soit P un point quelconque de la courbe, P′ son tangentiel. La corde des contacts correspondante à P′ passe par P et il n'y a qu'une seule corde passant par P et telle que ce point soit un des points de contact. Si par P on mène une sécante PMN, cette sécante sera également une corde des contacts, si les tangentiels M′ et N′ des points M et N coïncident. Mais les points M′ et N′ sont en ligne droite avec le point P′ et par P′ on ne peut mener qu'une tangente autre que P′P; donc il n'existe qu'une seule corde passant par P et telle que les contacts aient lieu aux deux autres points d'intersection avec la cubique. Il résulte de là que l'enveloppe de ces cordes est une conique.

Propriété de la conique. Soit A un des points d'intersection de la conique avec la cubique. Par ce point, il ne peut passer qu'une seule corde des contacts; donc son tangentiel A′ est un point d'inflexion et la corde est la tangente à la cubique au point A. Donc la cubique et la conique sont tangentes en A. D'où ce théorème :

La cubique et la conique sont tangentes en trois points dont les tangentiels sont des points d'inflexion de la cubique.

Réciproquement, si A′ est un point d'inflexion, il ne passe par A qu'une seule corde des contacts; donc A est sur la cubique. Il en résulte une démonstration peut-être nouvelle de ce théorème : *Une cubique nodale a trois points d'inflexion.*

×Question 528.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 168.)

Trouver deux ou trois nombres premiers dont le produit se compose de sept, onze, treize ou dix-sept fois le chiffre 1.

Solution par M. H. Brocard. Le signe × qui précède l'énoncé de la question veut dire, d'après les conventions suivies dans *Mathesis*, que la solution doit pouvoir se déduire des mathématiques élémentaires. Le problème est, en effet, tout arithmétique; cependant les méthodes

Digitized by Google

employées pour la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers ou pour la recherche des grands nombres premiers ne semblent pas encore avoir une simplicité suffisante, pour être couramment employées par les amateurs de recherches arithmétiques. Leur application entraîne, en réalité, un labeur effrayant. D'autre part, très peu de personnes possèdent des tables de nombres premiers, ou le temps, la patience et les moyens nécessaires pour entreprendre de pareils essais. Par bonheur, pour le problème proposé, nous rencontrons justement une solution complète qui rend inutile toute recherche. C'est un tableau de la décomposition des nombres de la forme $10^n - 1$ (et $10^n + 1$) publié par M. Ed. Lucas dans le n° de juillet 1886 du *Journal de Mathématiques élémentaires* (p. 160). Voici les extraits qui répondent à l'énoncé 528 :

n	$10^n - 1$	n	$10^n + 1$
7	$3^2.239.4649$	7	11.909091
11	$3^2.21649.513239$	11	$11^2.23.4093.8779$
13	$3^2.53.79.265371653$	13	$11.859.1058313049$
17	$3^2.2071723.536322257$	17	$11.103.4013.21993833369$

« La plupart de ces résultats, dit M. Ed. Lucas, ont été donnés par W. Looff(*) et publiés par Reuschle dans les *Neue zahlentheoretische Tabellen* (1856). Depuis, M. Le Lasseur(**) a donné la décomposition, assurément difficile, de $10^{17} - 1$ pour laquelle Looff avait affirmé qu'il n'y a pas de diviseurs inférieurs à 400000 ».

En examinant le tableau de ces nombres, on reconnaît facilement que ceux de la forme $10^{2k+1} + 1$ admettent le facteur 11, comme on peut le prévoir par le caractère de divisibilité par 11; on vérifie aussi, jusqu'à $n = 21$, que $10^{3(2k+1)} + 1$ est divisible par 13, et que $10^{4n+2} + 1$ est divisible par 101; mais l'analogie n'autorise pas à admettre que $10^{5(2k+1)} - 1$ est divisible par 37, car cette propriété est en défaut pour $k = 5$.

Ces renseignements renferment la réponse à la deuxième question de

(*) Voir *Mathesis*, IV, 38 et VI, 153.

(**) Bien connu par ses profondes recherches arithmétiques. Voir N. C. M.. t. VI, 1880, etc.

Digitized by Google

GERGONNE (*Mathesis*, VI, p. 153), demeurée plus de cinquante ans sans solution.

Les quelques nombres mentionnés ci-dessus donnent une idée de la difficulté d'essais entrepris en effectuant les divisions; ici, le secours d'arithmomètres devient presque indispensable et se trouve tout naturellement indiqué.

Quand on songe à l'extrême labeur qui a conduit à ces nombres et à d'autres du même genre, on doit se féliciter de les voir publiés et répandus par la presse mathématique, non seulement comme résultats remarquables, mais aussi pour ne pas laisser perdre le fruit de tant de veilles.

Solution analogue par M. I. BEYENS (Cadix).

---

*Question 542.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 240.)

On donne deux circonférences O, O′ *dont la seconde passe par le centre de la première; soient* F, F′ *deux points fixes de la circonférence* O′ *symétriques par rapport à la ligne des centres* OO′. *Démontrer que les droites joignant un point variable* M *de la circonférence* O′ *aux points* F, F′ *rencontrent la circonférence* O *en quatre points* A, B, A′, B′, *tels que deux côtés opposés du quadrilatère* ABA′B′ *enveloppent une circonférence et les deux autres une conique.* (J. NEUBERG.)

Solution par MM. DEPREZ, BOEDT, MEURICE *et* VERNIORY. Si MO est la bissectrice *intérieure* de l'angle AMA′, l'égalité OA = OA′ entraîne MA = MA′. L'angle FMF′ étant constant, l'angle MAA′ l'est également. Il résulte de là que la corde BA′ a une longueur constante et enveloppe une circonférence de centre O; que AA′ enveloppe une conique ayant pour foyers les points F, F′.

RECTIFICATIONS.

1° Dans l'article de M. Casey (p. 14) K désigne le point de Lemoine des cordes AA′, BB′, CC′ c'est-à-dire un point dont la distance à ces cordes sont proportionnelles aux longueurs de ces droites.

2° L'anomalie dont il est parlé dans la quest. 558 est l'angle φ, tel que $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, pour un point de l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**561**. Soit $A_1B_1C_1$ le triangle formé par les tangentes menées par les sommets du triangle ABC au cercle circonscrit, et soit $I_aI_bI_c$ le triangle formé par les parallèles à ces tangentes menées respectivement par A_1, B_1, C_1.

1° Les droites α_1I_a, β_1I_b, γ_1I_c, qui passent par les pieds α_1, β_1, γ_1 des bissectrices intérieures du triangle ABC, se coupent en un point H_0 dont les coordonnées normales sont

$$ar_a(2R - r_a), \quad br_b(2R - r_b), \quad cr_c(2R - r_c),$$

R, r_a, r_b, r_c étant les rayons du cercle circonscrit et des cercles exinscrits à ABC.

2° La parallèle à B_1C_1 menée par H_0 coupe AC en A_b, AB en A_c;
» C_1A_1 » BC en B_a, BA en B_c;
» A_1B_1 » CA en C_b, CB en C_a.

Démontrer que l'hexagone $A_bC_bB_cA_cC_aB_a$ est circonscrit au cercle inscrit à ABC.

3° Si α'_1, β'_1, γ'_1 sont les pieds des bissectrices extérieures, les droites α_1I_a, β'_1I_b, γ'_1I_c se coupent en un point H_a, qui a pour coordonnées

$$-ar(2R + r), \quad br_c(2R - r_c), \quad cr_b(2R - r_b),$$

et qui, par la construction faite pour H_0, donne un hexagone circonscrit au cercle inscrit O'_a. (E. LEMOINE.)

×**562**. Démontrer les formules

$$n = 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} - \cdots$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} = 1 - C_{n-1,1} + C_{n-2,2} - C_{n-3,3} + \cdots \quad \text{(ED. LUCAS.)}$$

563. En un point P de l'hyperboloïde à une nappe, on mène les deux génératrices; puis par chaque génératrice un plan perpendiculaire au plan tangent en P; ces plans touchent l'hyperboloïde en deux points Q et R; trouver l'équation du plan passant par QR et par le centre de l'hyperboloïde. (ED. LUCAS.)

564. Dans quel rapport la parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$, partage-t-elle l'ellipse représentée par $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$?

Digitized by Google

SUR LE CALCUL APPROXIMATIF DES AIRES PLANES(*).

Questions 92 et 93.

(Voir *Mathesis*, t. I, p. 206.)

92. *Soit* ABCD ... L *une courbe dont la concavité est tournée vers une droite al sur laquelle on a abaissé des perpendiculaires, équidistantes d'une quantité h, savoir :* $aA = y_0$, $bB = y_1$, $cC = y_2$, ..., $lL = y_n$. *L'aire* $S = aABC\ldots$, Ll *est donnée par la formule*

$$S = T + \frac{1}{6}\frac{n}{n-1}hD \text{ (approximativement)},$$

$$T = h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right),$$

$$D = \frac{y_1 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_0 + y_n}{2},$$

avec une erreur moindre que $\dfrac{5n-6}{6n-6}hD$. *L'erreur est nulle, si la courbe est une parabole du deuxième ou du troisième degré.* (P. M.)

I. *Limites élémentaires.* Pour abréger, désignons par *aire* (y_p, y_q), la portion de l'aire de la courbe comprise entre les ordonnées y_p, y_q. Cela posé, considérons les *aires* (y_0, y_1), (y_0, y_2), ou $aABb$, $aACc$. Par le point B menons la tangente B′BB″ rencontrant les ordonnées aA, cC respectivement en B′ et B″, puis les cordes AB, BC, dont la seconde rencontre aA en α. On aura évidemment,

$$aABb < \text{aire}\,(y_0, y_1) < a\alpha Bb,$$
$$aABCc < \text{aire}\,(y_0, y_1) < aB'BB''c,$$

ou analytiquement

$$h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{1}{2}y_1\right) < \text{aire}\,(y_0, y_1) < h\left(\tfrac{3}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2\right); \quad (1)$$
$$h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \tfrac{1}{2}y_2\right) < \text{aire}\,(y_0, y_2) < 2hy_1. \quad (2)$$

(*) Beaucoup de nos lecteurs ne peuvent recourir au tome I de *Mathesis*, qui contient nos premières recherches sur les formules d'approximation des aires; nous exposons donc la solution des questions 92, 93 en ne nous appuyant que sur les éléments de géométrie.

Digitized by Google

II. Appliquons la formule (2) à l'aire (y_0, y_2) et la formule (1) aux aires $(y_2, y_3), \ldots, (y_{n-1}, y_n)$. Nous aurons

$$h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \tfrac{1}{2}y_2) < \text{aire}\,(y_0, y_2) < 2hy_1,$$
$$h(\tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3) < \text{aire}\,(y_2, y_3) < h(\tfrac{3}{2}y_2 - \tfrac{1}{2}y_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h(\tfrac{1}{2}y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) < \text{aire}\,(y_{n-1}, y_n) < h(\tfrac{3}{2}y_{n-1} - \tfrac{1}{2}y_{n-2}).$$

Ajoutant, on trouve

$$T < \text{aire}\,(y_0, y_n) < T + hD.$$

L'expression T est l'aire du polygone inscrit dans la courbe; ensuite

$$T + hD = h(\tfrac{1}{2}y_1 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_{n-1}),$$

qui ne diffère de T que par le changement de y_0 en y_1 et de y_n en y_{n-1}, est l'aire du polygone inscrit où le premier et le dernier trapèze $aABb$, $hKLl$ sont remplacés par les rectangles compris entre les mêmes ordonnées et ayant pour hauteurs y_1 et y_{n-1}.

On peut prendre pour valeur approchée de S, toute quantité intermédiaire entre T et $T + hD$, par exemple,

$$T' = T + \frac{1}{6}\frac{n}{n-1}hD.$$

L'erreur maxima commise est inférieure à la plus grande des différences

$$T' - T = \frac{1}{6}\frac{n}{n-1}hD, \quad T + hD - T' = \frac{5n-6}{6(n-1)}hD,$$

c'est-à-dire à la seconde. La première partie du théorème est donc démontrée.

III. Si l'on pose $S = T + \theta hD$, θ désignant une fraction à déterminer de manière que cette formule soit exacte pour une parabole à axe vertical, $y = a + bx + cx^2$, on trouve que θ a précisément la valeur donnée par la formule précédente. En effet, si les ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$, correspondent respectivement à $x = 0, h, \ldots, nh$, on trouve

$$y_0 = a, \quad y_1 = a + bh + ch^2, \quad \ldots, \quad y_n = a + bnh + cn^2h^2,$$
$$T + \theta hD = anh + \tfrac{1}{2}bn^2h^2 + \tfrac{1}{6}ch^2[n(2n^2+1) - 6\theta(n-1)].$$

L'aire de la parabole est égale à l'aire du trapèze $aALl$, plus le tiers du triangle ALU, U étant le point d'intersection de la tangente AU en A, avec lL. Il est facile de voir que $AU = -cnh^2$. Par suite, il vient

$$S = \tfrac{1}{2}nh(a + a + bnh + cn^2h^2) + \tfrac{1}{6}nh(-cn^2h^2) = anh + \tfrac{1}{2}bn^2h^2 + \tfrac{1}{3}cn^3h^3.$$

Digitized by Google

Pour que $S = T + \theta h D$, il faut que

$$2n^3 = n(2n^2 + 1) - 6\theta(n-1), \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{1}{6}\frac{n}{n-1},$$

ce qui démontre la seconde partie du théorème.

On prouve, d'une manière analogue, que la même expression $T + \frac{1}{6}\frac{n}{n-1} h D$ exprime exactement l'aire

$$An h + \tfrac{1}{2} Bn^2 h^2 + \tfrac{1}{3} Cn^3 h^3 + \tfrac{1}{4} Gn^4 h^4$$

de la parabole cubique $y = A + Bx + Cx^2 + Gx^3$ (*).

IV. Remarque. De l'inégalité $T + hD >$ aire (y_0, y_n), ou

$$h(y_1 + y_{n-1}) + h(\tfrac{1}{2} y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + \tfrac{1}{2} y_{n-1}) > \text{aire}\,(y_0, y_1) + \text{aire}\,(y_1, y_{n-1}) + \text{aire}\,(y_{n-1}, y_n),$$

on déduit

$$h(y_1 + y_{n-1}) > \text{aire}\,(y_0, y_1) + \text{aire}\,(y_{n-1}, y_n) + \text{aire}\,(y_1, y_{n-1}) - h(\tfrac{1}{2} y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + \tfrac{1}{2} y_{n-1}),$$

et à fortiori

$$h(y_1 + y_{n-1}) > \text{aire}\,(y_n, y_{n-1}) + \text{aire}\,(y_{n-1}, y_n).$$

93. *Dans les mêmes hypothèses, sauf que le nombre des ordonnées est* $(2n+1)$, *on peut poser aussi, approximativement,*

$$S = m' + hd - \tfrac{1}{3} hd';$$

en écrivant, pour abréger,

$$m' = h(y_0 + 2y_2 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + y_{2n}),$$

$$d = \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2} - \frac{y_0 + y_{2n}}{2}, \quad d' = \frac{y_2 + y_{2n-2}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}.$$

L'erreur est plus petite que le terme complémentaire $hd - \frac{1}{3} hd'$, *et s'annule dans le cas où la courbe est une parabole du deuxième ou du troisième degré.* (P. M.)

I. L'expression m' est l'aire du polygone inscrit ayant pour sommets les extrémités des ordonnées $y_0, y_2, y_4, \dots, y_{2n-2}, y_{2n}$ et S est supérieur à m'.

(*) Fermat a démontré, d'une manière élémentaire, que l'aire d'une parabole $y = Px^p$, depuis l'ordonnée $y_0 = Px_0^p$ jusqu'à l'ordonnée $Y = PX^p$, est $[(XY - x_0 y_0) : (p+1)]$ (*Mathesis*, t. V, p. 44). Toute formule de quadrature où les ordonnées à égale distance des extrêmes entrent symétriquement et linéairement est d'ailleurs exacte pour une parabole d'ordre $2n+1$, si elle est exacte pour une parabole d'ordre $2n$ (*Mathesis*, t. I, supplément, p. 53.)

Digitized by Google

On a ensuite, d'après la remarque IV, relative à la question précédente,

$$h(y_1 + y_{2n-1}) > \text{aire}\,(y_0, y_1) + \text{aire}\,(y_{2n-1}, y_{2n}); \qquad (a)$$

puis, d'après les formules (1),

$$h(\tfrac{3}{2}\,y_1 - \tfrac{1}{2}\,y_2) > \text{aire}\,(y_0, y_1), \qquad (b)$$

$$h(\tfrac{3}{2}\,y_{2n-1} - \tfrac{1}{2}\,y_0) > \text{aire}\,(y_{n-1}, y_{2n}). \qquad (c)$$

Multiplions les relations (b) (c) par 2 et ajoutons-les à l'égalité (a), puis divisons par 3. Nous trouverons ainsi

$$h(\tfrac{4}{3}\,y_1 - \tfrac{1}{3}\,y_2 + \tfrac{4}{3}\,y_{2n-1} - \tfrac{1}{3}\,y_{2n-2}) > \text{aire}\,(y_0, y_1) + \text{aire}\,(y_{2n-1}, y_{2n}).$$

On a ensuite, d'après la formule (2) du n° 1 de la question 92,

$$2hy_2 > \text{aire}\,(y_1, y_2),\ 2hy_4 > \text{aire}\,(y_3, y_4),\ \ldots,\ 2hy_{2n-2} > \text{aire}\,(y_{2n-3}, y_{2n-1}). \qquad (d)$$

Ajoutant ces inégalités, à la précédente, il vient

$$m' + 2hd - \tfrac{2}{3}\,hd' > \mathrm{S}.$$

Puisque S est compris entre m' et $m' + 2hd - \frac{2}{3}\,hd'$, on peut écrire approximativement

$$\mathrm{S} = m' + hd - \tfrac{1}{3}\,hd',$$

avec une erreur moindre que $hd - \frac{1}{3}\,hd'$.

II. On démontre, comme dans la question précédente, que la formule est exacte pour les paraboles du deuxième et du troisième degré. On peut aussi procéder un peu plus rapidement comme il suit, pour la parabole du second degré, $y = a + bx + cx^2$.

D'après les propriétés connues de cette courbe, les différences entre les trapèzes acCA, csEC, etc., et les aires courbes correspondantes sont toutes égales entre elles et égales à

$$u = \frac{2}{3} \cdot 2h\left[y_1 - \frac{1}{2}(y_0 + y_2)\right] = -\frac{4c}{3}h^3.$$

On a donc $\mathrm{S} = m' + nu$, ou

$$\mathrm{S} = m' - \frac{4c}{3}nh^3.$$

Or, on trouve également

$$hd - \frac{1}{3}hd' = -\frac{4c}{3}nh^3.$$

Donc, pour cette parabole,

$$\mathrm{S} = m + hd - \tfrac{1}{3}\,hd'.$$

Digitized by Google

III. Remarques. 1° En ajoutant simplement les inégalités (*b*), (*c*), (*d*), sans faire intervenir (*a*), on obtient l'inégalité

$$m' + hd'' > S,$$

où

$$d'' = (\tfrac{3}{8} y_1 - \tfrac{1}{8} y_2 - y_0) + (\tfrac{5}{8} y_{2n-1} - \tfrac{1}{8} y_{2n-2} - y_{2n}).$$

On trouve aisément que la formule

$$S = m' + \frac{4n}{6n-3} hd''$$

est exacte pour une parabole du second ou du troisième degré.

2° La formule donnée, dans la question 93, a été trouvée, par un procédé très différent de celui qui a été exposé plus haut, par M. le général Parmentier (*Association française pour l'avancement des Sciences;* session de Grenoble, 1882). Voir la note suivante.

NOTE.

I. *Trois formules de M. le général Parmentier.* Les valeurs comprises entre les limites (1), (2) du n° I de la question 92, et donnant des résultats exacts pour les paraboles du second degré, sont, comme il est aisé de le voir,

$$\tfrac{5}{6} h (\tfrac{1}{2} y_0 + \tfrac{1}{2} y_1) + \tfrac{1}{6} h (\tfrac{3}{2} y_1 - \tfrac{1}{2} y_2) = h (\tfrac{5}{12} y_0 + \tfrac{8}{12} y_1 - \tfrac{1}{12} y_2), \quad (1')$$

$$\tfrac{2}{3} h (\tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + \tfrac{1}{2} y_2) + \tfrac{1}{3} \cdot 2hy_1 = \tfrac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (2')$$

On peut donc écrire, approximativement pour les courbes quelconques, exactement pour les paraboles du second degré,

$$\text{aire } (y_0, y_1) = h (\tfrac{5}{12} y_0 + \tfrac{8}{12} y_1 - \tfrac{1}{12} y_2),$$
$$\text{aire } (y_1, y_2) = \tfrac{1}{3} h (y_1 + 4y_2 + y_3),$$
$$\text{aire } (y_2, y_3) = \tfrac{1}{3} h (y_2 + 4y_3 + y_4),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\text{aire } (y_{2n-3}, y_{2n-1}) = \tfrac{1}{3} h (y_{2n-3} + 4y_{2n-2} + y_{2n-1}),$$
$$\text{aire } (y_{2n-1}, y_{2n}) = h (\tfrac{5}{12} y_{2n} + \tfrac{8}{12} y_{2n-1} - \tfrac{1}{12} y_{2n-2}),$$

En ajoutant ces inégalités, on trouve (*)

$$\text{aire } (y_0, y_{2n}) = p_3,$$

(*) Il ne serait pas difficile de trouver une limite de l'erreur que comporte cette formule, aussi bien que pour p_1 et p_2.

Digitized by Google

où

$$p_3 = \tfrac{1}{3}h\,[(4A + 2B) - \tfrac{3}{4}(y_0 + y_{2n}) + (y_1 + y_{2n-1}) - \tfrac{1}{4}(y_2 + y_{2n-2})],$$

$$A = \tfrac{1}{2}y_0 + y_2 + \cdots + y_{2n-2} + \tfrac{1}{2}y_{2n},$$

$$B = y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}.$$

D'autre part, en ajoutant les égalités

$$\text{aire}\,(y_0, y_2) = \tfrac{1}{3}h\,(y_0 + 4y_1 + y_0),$$

. . . . . .

$$\text{aire}\,(y_{2n-2}, y_{2n}) = \tfrac{1}{3}h(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

on trouve, comme l'on sait, la formule de Simpson, exacte aussi pour les paraboles du second degré, savoir :

$$\text{aire}\,(y_0, y_1) = s,$$

où

$$s = \tfrac{1}{3}h(2A + 4B).$$

Toute combinaison linéaire $kp_3 + (1 - k)s$ des valeurs p_3 et s jouira aussi de la propriété de représenter exactement l'aire d'une parabole du second degré, et approximativent l'aire d'une autre courbe.

On trouve, par exemple, en éliminant les A ou les B,

$$p_4 = 2s - p_3 = h[2B + \tfrac{1}{4}(y_0 + y_{2n}) - \tfrac{1}{3}(y_1 + y_{2n-1}) + \tfrac{1}{12}(y_2 + y_{2n-2})],$$

$$p_2 = 2p_3 - s = h[2A - \tfrac{1}{2}(y_0 + y_{2n}) + \tfrac{2}{3}(y_1 + y_{2n-1}) - \tfrac{1}{6}(y_2 + y_{2n-2})],$$

$$C = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) = \tfrac{1}{2}(p_3 + s)$$

$$= h\,[A + B - \tfrac{1}{8}(y_0 + y_{2n}) + \tfrac{1}{6}(y_1 + y_{2n-1}) - \tfrac{1}{24}(y_2 + y_{2n-2})].$$

On a encore les relations

$$p_1 = 3s - 2C, \quad p_2 = 4C - 3s, \quad 2p_1 + p_2 = 3s. \qquad (\varepsilon)$$

Les expressions p_1, p_2, p_3 ont été données par M. le général Parmentier. Il nous a communiqué l'expression p_1 en 1881 (voir *Supplément* du t. I de *Mathesis*, p. 60); p_2 est l'expression donnée dans la question 93; elle se trouve, avec p_3, dans le mémoire cité plus haut; aire $(y_0, y_n) = C$ est la formule de M. Catalan. M. le général Parmentier observe, avec raison, que C étant, le plus souvent, une valeur moins approchée de l'aire (y_0, y_{2n}) que s, il résulte des formules (ε) que l'expression p_2 doit aussi conduire à une valeur moins exacte que p_1.

II. *Nouvelle formule des trapèzes corrigée.* Désignons par Y_1 l'ordonnée du point où la tangente à l'extrémité de y_0 rencontre le prolongement de y_1. On aura

$$h(\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{1}{2}y_1) < \text{aire}\,(y_0, y_1) < h(\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{1}{2}Y_1). \qquad (3)$$

Digitized by Google

La valeur comprise entre les limites ici assignées pour aire (y_0, y_1), et donnant des résultats exacts pour les paraboles du second degré, est

$$\tfrac{2}{3}h(\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{1}{2}y_1) + \tfrac{1}{3}h(\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{1}{2}Y_1) = h(\tfrac{1}{3}y_0 + \tfrac{1}{3}y_1 + \tfrac{1}{6}Y_1) \qquad (3')$$

Cette valeur a été proposée par M. Perrodil (*Annales des Ponts et Chaussées* de France, juillet 1885, pp. 122-128), mais il n'a pas remarqué les limites (3). On déduit de celles-ci que la formule approchée

$$\text{aire}\,(y_0, y_1) = h(\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{1}{3}y_1 + \tfrac{1}{6}Y_1)$$

comporte au plus une erreur égale à $\frac{1}{3}h(Y_1 - y_1)$, c'est-à-dire, égale aux deux tiers du triangle ayant pour sommets les extrémités de y_0, y_1, Y.

On peut déduire des limites (3) *une formule des trapèzes corrigée*, qui ne semble pas encore avoir été remarquée. 1° *Soit n impair*. D'après (3) et (2), on a

$$\begin{aligned}
&\text{aire}\,(y_0, y_1) < h(\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{1}{2}Y_1), && \text{aire}\,(y_0, y_1) < 2hy_2,\\
&\text{aire}\,(y_1, y_2) < 2hy_2, && \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && \text{aire}\,(y_{n-3}, y_{n-1}) < 2hy_{n-2},\\
&\text{aire}\,(y_{n-2}, y_n) < 2hy_{n-1}, && \text{aire}\,(y_{n-1}, y_n) < h(\tfrac{1}{2}Y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n);
\end{aligned}$$

Y_{n-1} est l'ordonnée du point de rencontre de la tangente à l'extrémité de y_n avec y_{n-1}. Ajoutons toutes ces inégalités et divisant par 2, il vient

$$\text{aire}\,(y_0, y_n) < T + \tfrac{1}{2}h(Y_1 - y_0 + Y_{n-1} - y_n), \qquad (t)$$

où

$$T = h(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n) = h(A + B).$$

Puisque T est l'aire du polygone inscrit dans la courbe,

$$\text{aire}\,(y_0, y_n) > T.$$

On obtiendra une valeur approchée de l'aire, en ajoutant un tiers de la limite supérieure aux deux tiers de la limite inférieure et elle sera exacte pour une parabole du second degré. On trouve ainsi la formule

$$\begin{aligned}
\text{aire}\,(y_0, y_n) &= T + \tfrac{1}{12}h(Y_1 - y_0) + \tfrac{1}{12}(Y_{n-1} - y_n)\\
&= h(\tfrac{5}{12}y_0 + \tfrac{1}{12}Y_1 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1} + \tfrac{1}{12}Y_{n-1} + \tfrac{5}{12}y_n), \qquad (u)
\end{aligned}$$

qui comporte une erreur moindre que les deux tiers de la différence entre les limites, savoir :

$$\tfrac{1}{6}h(Y_1 - y_0) + \tfrac{1}{6}h(Y_{n-1} - y_n).$$

Géométriquement, $\frac{1}{6}h(Y_1 - y_0)$ est le tiers du triangle ayant pour sommets les extrémités de y_0 et Y_1, et la projection du premier point sur Y_1. L'interprétation de $\frac{1}{6}h(Y_{n-1} - y_n)$ est analogue.

Digitized by Google

2° *Soit n pair.* Dans ce cas, on déduit la relation (*t*) des inégalités suivantes :

$$\text{aire}\,(y_0, y_1) < h\left(\tfrac{1}{2}\,y_0 + \tfrac{1}{2}\,Y_1\right), \qquad \text{aire}\,(y_0, y_2) < 2hy_1,$$
$$\text{aire}\,(y_1, y_3) < 2hy_2, \qquad \text{aire}\,(y_2, y_4) < 2hy_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots\dots$$
$$\text{aire}\,(y_{n-3}, y_{n-1}) < 2hy_{n-2}, \qquad \text{aire}\,(y_{n-4}, y_{n-2}) < 2hy_{n-3},$$
$$\text{aire}\,(y_{n-1}, y_n) < h\left(\tfrac{1}{2}\,Y_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,y_n\right), \qquad \text{aire}\,(y_{n-2}, y_n) < 2hy_{n-1}.$$

Le reste de la démonstration se fait comme dans le cas précédent.

Remarque. La formule de M. Catalan : $\text{aire}\,(y_0, y_n) = C$, peut se déduire des formules (1), (2), comme la formule nouvelle (*u*) se déduit de (2) et (3). Cette démonstration est plus simple que celle que nous avons donnée dans le Supplément au tome I de *Mathesis*(*).

SUR LES POINTS COMPLÉMENTAIRES;

par M. Ém. Vigarié, élève de l'École des Mines (Paris).

(Suite; voir *Mathesis*, t. VII, p. 6 et 57.)

13. Revenons maintenant aux groupes de Nagel et de Gergonne.

Les points ν, ν_a, ν_b, ν_c étant les centres des cercles tangents aux côtés du triangle $A'_1B'_1C'_1$, anticomplémentaire de ABC, les triangles $\nu_a\nu_b\nu_c$, $\nu\nu_c\nu_b$, $\nu_c\nu\nu_a$, $\nu_b\nu_a\nu$ sont les antiorthiques de $A'_1B'_1C'_1$; pour abréger le langage, nous dirons que ce sont les *triangles nagéliens* de ABC. Inversement, le *triangle antinagélien* de ABC est le complémentaire du triangle orthique de ABC.

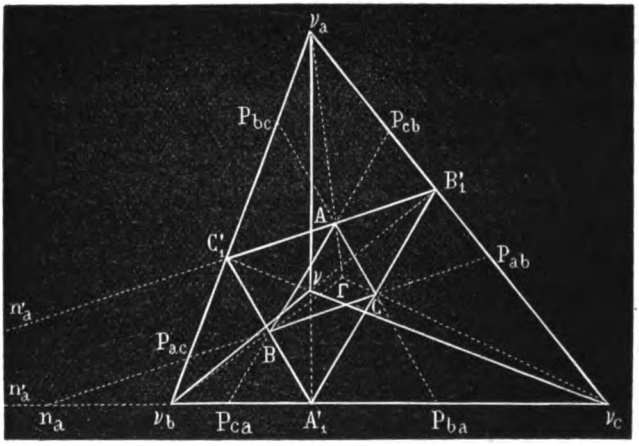
(*) Nous saisissons l'occasion que nous offre le présent travail pour signaler à nos lecteurs, sur la formule de Gauss, un travail antérieur au nôtre, dont nous n'avons eu connaissance que récemment. Notre expression du reste de la formule de Gauss est contenue implicitement dans une formule plus générale, publiée par M. Markoff, en 1885, dans les *Mathematische Annalen*, t. XXV, pp. 427-429 et, en 1884, dans un livre publié à St-Pétersbourg, en langue russe. Nous empruntons ce dernier renseignement à l'excellent ouvrage intitulé : *Sur quelques applications des fractions continues*, par C. Possé, professeur à l'Université de St-Pétersbourg (St-Pétersbourg, 1886; Paris, Hermann; VII-175 pages), où l'on trouve résumées d'importantes recherches de MM. Tchebycheff, Markoff et Possé, sur le calcul approximatif des fonctions et des intégrales.

Digitized by Google

Si nous combinons le n° 10 avec les théorèmes 2 des n^os 11 et 12, nous trouvons la proposition suivante : *Le centre d'homologie du triangle* ABC *et de l'un des triangles nagéliens est le point de Lemoine de ce triangle nagélien et le point de Gergonne (ou adjoint du point de Gergonne) de* ABC. Sous une autre forme, *le point de Lemoine de* ABC *est le point de Gergonne (ou un adjoint de ce point) du triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle orthique de* ABC.

On peut encore remarquer les deux énoncés suivants du même théorème :

Les complémentaires des quatre points de Gergonne coïncident avec les points de Lemoine des triangles antiorthiques du triangle fondamental(*).



Le point de Lemoine d'un triangle, le centre de gravité et le point de Gergonne du triangle orthique sont en ligne droite, et le second de ces points divise la distance des deux autres dans le rapport 2 : 1(**).

14. Examinons maintenant la position de l'axe d'homologie des triangles ABC, $\nu_a\nu_b\nu_c$.

Soient n_a, n_b, n_c les intersections des côtés homologues de ces triangles, et soient n'_a, n'_b, n'_c celles des côtés homologues des triangles $A'_1B'_1C'_1$, $\nu_a\nu_b\nu_c$.

(*) Le triangle fondamental est maintenant celui qui a été désigné précédemment par $A'_1B'_1C'_1$.

(**) Le premier triangle de cet énoncé est l'un des triangles désignés plus haut par $\nu_a\nu_b\nu_c$, $\nu\nu_a\nu_b$, ...

Digitized by Google

La droite $n'_a n'_b n'_c$ est l'axe orthique du triangle $\nu_a\nu_b\nu_c$; nous conviendrons de l'appeler *axe antiorthique* de $A'_1B'_1C'_1$. Il est facile de voir que

$$n_aC : n_aB = n'_aB'_1 : n'_aC'_1 = A'_1B'_1 : A'_1C'_1 = AB : AC.$$

Donc n_a est, dans le triangle ABC, le conjugué isotomique du pied de la bissectrice extérieure de l'angle ABC. Par conséquent, *l'axe d'homologie du triangle* ABC *et de l'un de ses triangles nagéliens est, par rapport à* ABC, *la transversale réciproque d'un axe antiorthique de* ABC (*).

La droite $n_a n_b n_c$ est par rapport au triangle $\nu_a\nu_b\nu_c$, harmoniquement associée au deuxième potentiel du point ν. Car n_a étant le milieu de $A'_1n'_a$, on a

$$n_aB : n_aC = \overline{A'_1\nu_b}^2 : \overline{A'_1\nu_c}^2.$$

15. Les côtés non homologues des triangles ABC, $\nu_a\nu_b\nu_c$ se coupent en six points, qui jouissent de propriétés remarquables sur lesquelles nous croyons utile d'insister, bien qu'elles soient déjà connues.

Désignons par P'_{ab}, P_{ac} les intersections de BC avec $\nu_a\nu_c$, $\nu_a\nu_b$, ... A cause de

$$\textit{angle}\ \nu_aP_{ab}C = \nu_aB'_1C'_1 = CB'_1\nu_c,$$

on a

$$CP_{ab} = CB'_1 = CA'_1 = AB,$$

et le triangle $A'_1P_{ab}B'_1$ est rectangle en P_{ab}. Donc : 1° *Les points* P *sont les projections des pieds des hauteurs du triangle* $\nu_a\nu_b\nu_c$ *sur les côtés non correspondants de ce triangle.* 2° *Ces points s'obtiennent encore en prolongeant les côtés de chaque angle de* ABC, *au delà du sommet, d'une quantité égale au côté opposé.*

Des relations $CP_{ab} = BA$, $BP_{ac} = CA$, on conclut que le milieu de la droite $P_{ab}P_{ac}$ coïncide avec le point de contact α de BC avec le cercle inscrit à ABC, et que $\overline{IP}^2_{ab} = \overline{IP}^2_{ac} = r^2 + p^2$; par conséquent *les côtés non homologues des triangles* ABC, $\nu_a\nu_b\nu_c$ *se coupent sur une circonférence concentrique avec la circonférence inscrite à* ABC.

Cette circonférence a reçu le nom de *circonférence de Taylor* du triangle

---

(*) Les axes antiorthiques d'un triangle sont les droites qui passent par les pieds des trois bissectrices extérieures ou par les pieds de deux bissectrices intérieures et d'une bissectrice extérieure. On a vu ci-dessus que ces axes sont perpendiculaires aux droites joignant le centre du cercle circonscrit au triangle donné, aux centres des cercles tangents aux trois côtés.

Digitized by Google

$\nu_a\nu_b\nu_c$. Les triangles nagéliens $\nu\nu_c\nu_b$, $\nu_c\nu\nu_a$, $\nu_b\nu_a\nu$ donnent lieu à des propositions analogues.

16. On peut rattacher aux points de Nagel un problème intéressant, qui a été résolu élégamment par M. E. Lemoine(*). En voici l'énoncé :

Trouver dans le plan du triangle ABC *un point* θ *tel que les parallèles menées par ce point aux côtés rencontrent les côtés en six points qui soient les sommets d'un hexagone circonscriptible à un cercle* (**).

Ce cercle est évidemment l'un des cercles tangents aux trois côtés de ABC. Supposons que ce soit le cercle inscrit I. Soient D, E les points où les parallèles à AB, AC menées par θ rencontrent respectivement AC, AB; la droite DE est tangente au cercle I. Soient aussi D', E' les points d'intersection de AC et AB avec la perpendiculaire élevée en I sur AI. Des triangles équiangles DID', IEE', on déduit

$$DD'.\ EE' = \overline{ID'}^2, \qquad (1)$$

relation connue. Si x, y, z, sont les coordonnées normales de θ, on a aussi :

$$ID' = \frac{r}{\cos\frac{1}{2}A},\quad AD' = AE' = \frac{ID'}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{2r}{\sin A},\quad AD = \frac{z}{\sin A},\quad AE = \frac{y}{\sin A},$$

égalités au moyen desquelles on transforme la relation (1) en

$$(y - 2r)(z - 2r) = 4r^2 \sin\tfrac{1}{2}A.$$

Par analogie

$$(z - 2r)(x - 2r) = 4r^2 \sin^2\tfrac{1}{2}B,\quad (x - 2r)(y - 2r) = 4r^2 \sin^2\tfrac{1}{2}C(***).$$

De là on tire, en considérant $x - 2r$, $y - 2r$, $z - 2r$ comme trois inconnues :

$$x - 2r = -2r\frac{\sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A},\quad x - 4r = -2r\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A},$$

$$x - 4r = -4r\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin A} = -\frac{S}{R\sin A} = -h_a;$$

donc

$$x + h_a = y + h_b = z + h_c = 4r. \qquad (2)$$

L'interprétation de ce résultat est pour ainsi dire immédiate : le point

---

(*) Comparer Lemoine, 5; Boubals, 9; Lemoine, 11.

(**) La question 561 traite le problème analogue pour les antiparallèles aux côtés.

(***) La forme de ces équations montre immédiatement que le point θ est à l'intersection de trois hyperboles ayant pour asymptotes deux tangentes au cercle I parallèles aux côtés de ABC.

Digitized by Google

θ est équidistant des parallèles par A'_1, B'_1, C'_1 respectivement à BC, CA, AB ; autrement dit, θ *est le centre du cercle inscrit au deuxième triangle anticomplémentaire* $A'_2B'_2C'_2$, ou *l'anticomplémentaire du point de Nagel* ν.

Il existe aussi trois points θ_a, θ_b, θ_c tels que les parallèles aux côtés de ABC déterminent sur les côtés les sommets d'un hexagone circonscriptible à l'un des cercles exinscrits I_a, I_b, I_c. Ces points, centres des cercles exinscrits au triangle $A'_2B'_2C'_2$, sont les anticomplémentaires des points ν_a, ν_b, ν_c ; ils ont pour coordonnées normales

$$\begin{array}{lll} -4r_a-h_a, & 4r_a-h_b, & 4r_a-h_c; \\ 4r_b-h_a, & -4r_b-h_b, & 4r_b-h_c; \\ 4r_c-h_a, & 4r_c-h_b, & -4r_c-h_c. \end{array} \qquad (3)$$

Les coordonnées barycentriques de θ, θ_a, θ_b, θ_c se calculent aisément, si l'on considère ces points comme anticomplémentaires de ν, ν_a, ν_b, ν_c ; on trouve

$$\theta \ldots 2a-p,\ 2b-p,\ 2c-p\ ;\ \theta_a \ldots -3a-b-c,\ a+3b-c,\ a-b+3c, \text{ etc.}$$

Des égalités (2) on déduit

$$y-z=h_c-h_b=(b-c)\sin A, \quad z-x=(c-a)\sin B,$$
$$x-y=(a-b)\sin C.$$

Les droites représentées par ces équations passent par le point θ et sont parallèles aux bissectrices intérieures du triangle ABC ; ce sont donc les droites $A'_2\theta$, $B'_2\theta$, $C'_2\theta$. Si on cherche les points où elles coupent deux côtés du triangle de référence, on trouve cette construction élégante :

Prenez sur BA *et* CA, *vers le point* A, $BV_{cb}=b$, $CV_{bc}=c$;
» CB *et* AB, » B, $CV_{ac}=c$, $AV_{ca}=a$;
» AC *et* BC, » C, $AV_{ba}=a$, $BV_{ab}=b$;

les droites $V_{cb}V_{bc}$, $V_{ac}V_{ca}$, $V_{ba}V_{ab}$ *iront concourir au point* θ.

Les expressions (3) conduisent aisément aux équations des bissectrices extérieures du triangle $A'_2B'_2C'_2$, droites passant deux à deux par les points θ_a, θ_b, θ_c ; on trouve

$$y+z=-(h_c+h_b)=-(b+c)\sin A,$$
$$z+x=-(c+a)\sin B,\ x+y=-(a+b)\sin C.$$

Ces résultats sont susceptibles de l'interprétation suivante, qui a

Digitized by Google

quelque analogie avec la construction du triangle $\nu_a\nu_b\nu_c$ au moyen des points P :

Prolonger les côtés de l'angle A, *au delà du sommet, de* $AU_{ca}=AU_{ba}=b+c$;
» » B, » » $BU_{ab}=BU_{cb}=c+a$;
» » C, » » $CU_{ac}=CU_{bc}=a+b$;

les droites $U_{ca}U_{ba}$, $U_{ab}U_{cb}$, $U_{ac}U_{bc}$ se couperont deux à deux en θ_a, θ_b, θ_c(*).

17. Les distances du point de Nagel aux côtés de ABC étant égales à

$$\frac{2S(p-a)}{p}=\frac{r(p-a)}{a}=\frac{h_a(p-a)}{p},\quad \frac{h_b(p-b)}{p},\quad \frac{h_c(p-c)}{p},$$

on trouve facilement que les longueurs des parallèles menées par ν aux côtés de ABC et limitées par les angles opposés ont pour mesures

$$\frac{a^2}{p},\quad \frac{b^2}{p},\quad \frac{c^2}{p}.$$

Elles sont donc proportionnelles aux carrés des côtés de ABC.

Les parallèles menées par ν_a ont pour longueurs

$$\frac{a^2}{p-a},\quad \frac{b^2}{p-b},\quad \frac{c^2}{p-c}.$$

18. Les distances des points ν, ν_a,... aux autres points remarquables de ABC s'obtiennent facilement, si l'on observe que les droites homologues des triangles semblables ABC, $A_1'B_1'C_1'$ sont dans le rapport 1 : 2. Ainsi

$\nu G=2GI$, $\nu O=2IO_9=R-2r$, $\nu I=3GI$, $\nu H=2IO=2\sqrt{R(R-2r)}$.

M. Hochheim a examiné divers lieux géométriques du point de Nagel. Pour cette question, nous nous contentons de renvoyer au Mémoire de l'auteur. (*A continuer*).

(*) Les triangles ABC, $\theta_a\theta_b\theta_c$ ne sont pas homologiques, et les points U n'appartiennent pas à une même circonférence.

Digitized by Google

SUR LA RÉVERSIBILITÉ DE LA TRANSFORMATION LINÉAIRE(*);

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

1. Lemme. *Dans une transformation linéaire réversible, les droites passant par un même point rencontrent leurs correspondantes en des points situés sur une même ligne droite.* En effet, appelons P le point considéré, P′ le point correspondant. A des droites passant par le point P, correspondent des droites passant par le point P′ et les faisceaux formés par ces deux systèmes de droites sont homographiques. La transformation étant réversible, le rayon PP′ du premier faisceau a pour correspondant le rayon P′P dans le second; par conséquent, les rayons correspondants se coupent en des points situés sur une même ligne droite.

2. Théorème. *La seule transformation linéaire réversible est la transformation homologique harmonique.* Soient deux couples de points correspondants M, M′, et N, N′. D'après le lemme précédent, les droites MN et M′N′, MN′ et M′N se coupent sur une droite fixe quels que soient les points N et N′. Appelons S le point d'intersection des droites MM′ et NN′; μ et ν, ceux de ces mêmes droites avec la droite fixe.

Dans le quadrilatère complet MM′NN′ on aura :

$$(SM\mu M') = -1, \quad (SN\nu N') = -1.$$

Ces égalités nous montrent : 1° que le point S est fixe sur la droite MM′; 2° que pour obtenir le point correspondant d'un point donné N, il suffit de mener la droite SN rencontrant la droite fixe $\mu\nu$ en un point ν et de prendre sur $S\nu$ le conjugué harmonique de N par rapport aux points S et ν. Il résulte de là que la transformation linéaire réversible est une *transformation homologique* dont le coefficient d'homologie est égal à -1. C'est pour ce motif que cette transformation a été appelée *transformation homologique harmonique*. On l'appelle aussi transformation homologique *involutive*.

(*) Voir un article de M. Mansion dans la N. C. M. 1878, t. IV, pp. 257-261, 313-318 (C. S.). Dans cet article, nous démontrions analytiquement, d'une manière trop longue, l'existence d'une seule transformation linéaire réversible, pour corriger une assertion inexacte d'un article antérieur, cité plus bas par M. Servais. (P. M.)

Digitized by Google

3. Remarque. Le lemme précédent nous explique comment M. Mansion, dans un article inséré dans la N. C. M., II, pp. 15-22, 41-49 était arrivé à cette assertion inexacte : Il n'existe pas de transformation linéaire réversible. En effet, pour que, dans une transformation homographique, la figure primitive et la figure transformée n'aient que trois points communs(*), il faut que des droites concourantes rencontrent leurs correspondantes en des points situés sur une conique. Or, ceci exclut, d'après notre lemme, les transformations linéaires réversibles.

NOTES MATHÉMATIQUES.

4. *Sur la théorie des foyers* (Extrait d'une letfre d'un abonné). Permettez-moi, monsieur, une remarque élémentaire au sujet de la théorie des foyers, que j'ai eu occasion de faire en interrogeant des élèves, et qui est purement pédagogique. Il me paraîtrait utile, au lieu de commencer immédiatement, en cherchant à identifier l'équation générale du second degré à la suivante

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+ny+p)^2,$$

de *préparer* cette recherche comme il suit. Je remarquerai d'abord que, dans le cas de l'ellipse, la relation

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

si l'on pose $b^2=a^2-c^2$, donne lieu à cette transformation

$$y^2=(a-c)\left(1-\frac{x}{a}\right)(a+c)\left(1+\frac{x}{a}\right);$$

puis

$$(a-c)\left(1-\frac{x}{a}\right)=a+\frac{cx}{a}-c-x,$$

$$(a+c)\left(1+\frac{x}{a}\right)=a+\frac{cx}{a}+c+x,$$

d'où

$$y^2=\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2-(c+x)^2,\quad y^2+(c+x)^2=\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2,$$

(*) Ce que nous admettions implicitement dans tout le cours de notre article du tome II de la N. C. M. (P. M.)

Digitized by Google

et par le changement de c en $-c$:

$$y^2 + (x - c)^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2. \qquad (1)$$

Voilà donc la notion géométrique des foyers, tirée d'une transformation algébrique simple de l'équation de la courbe. Pour l'hyperbole, on pose $b^2 = c^2 - a^2$, ce qui donne

$$y^2 = (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 - (c + x)^2.$$

Enfin, pour la parabole,

$$y^2 = 2px = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 - (x - \tfrac{1}{2}p)^2.$$

Reprenant une de ces relations, par exemple (1), j'observe qu'en changeant les coordonnées et posant

$$x = \alpha + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = \beta + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

je lui conserve la même forme. On a, en effet :

$$y^2 + (x - c)^2 = [y \cos\varphi - (x - c)\sin\varphi]^2 + [y \sin\varphi + (x - c)\cos\varphi]^2$$
$$= (y' + g)^2 + (x' + h)^2,$$

en posant

$$g = \beta\cos\varphi - (\alpha + c)\sin\varphi, \quad h = \beta\sin\varphi + (\alpha - c)\cos\varphi,$$

et, par conséquent,

$$(y' + g)^2 + (x' + h)^2 = \left[a - \frac{c\alpha}{a} - \frac{c}{a}(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\right]^2.$$

5. *Sur le nœud de cravate.* Le t. XVI (1883) du *Bulletin* du prince B. Boncompagni renferme un mémoire de M. Jacoli que nous croyons devoir signaler, parce qu'il se rapporte à un article publié dans *Mathesis*, t. II, p. 54 et 202 intitulé : *Le nœud de cravate*, extrait du second volume des *Récréations mathématiques* de notre collaborateur, M. Ed. Lucas. La construction en question, dit M. Ch. Henry, ainsi que celle de l'hexagone régulier, se trouve dans un livre publié en 1682 à Rome et intitulé : *Trattato della Sfera*. Ce livre a été jusqu'ici attribué à *Cavalieri*. D'après M. Jacoli, l'auteur ne serait pas ce savant, mais son élève *Urbano d'Aviso*, qui, dans le livre, assume le modeste rôle d'éditeur.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE(*).

Sur quelques systèmes de tiges articulées ; tracé mécanique des lignes ; par M. J. NEUBERG, professeur à la faculté des sciences. Liége, G. Bertrand, 1886. Une brochure in-8° de 48 pages avec 2 planches Prix : fr. 1-80.

Historique : Peaucellier, Lipkine, Hart, Kempe, etc. ***Pantographes ou proportionnateurs :*** Figures semblables; pantographe de Scheiner; pantographe oblique. ***Inverseurs ou réciprocateurs :*** Théorie des figures inverses. Inverseur de Peaucellier : transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne ou en un autre circulaire. Inverseur de Hart, simple ou généralisé. ***Appareils de Kempe :*** Double rhomboïde, double contreparallélogramme, sextilatère. ***Ellipsographes :*** Mouvement à ornières, engrenage de La Hire; ellipsographe de Kempe. ***Conicographes :*** Podaire et polaire réciproque d'une conique; principe fondamental des conicographes. ***Podaire de cercle :*** Étude du limaçon de Pascal; compas conchoïdal ou protracteur; autres appareils à tracer le limaçon. ***Podaire de parabole :*** Cissoïde, strophoïde, trisectrice de Maclaurin, compas cissoïdal. ***Podaire de conique à centre.*** Lemniscate et lemniscatoïde; extracteur binôme quadratique et conicographe de Sylvester, élément de Roberts, podographe. ***Compas anallagmatiques.*** Propriétés des courbes de ce nom; compas pour les décrire.

Inutile de recommander la brochure de M. Neuberg aux lecteurs de ***Mathesis.*** Tous ceux qui connaissent sa manière pénétrante de traiter les questions géométriques devineront aisément avec quelle simplicité et quelle richesse de développements il a exposé la théorie des compas composés. (P. M.)

A. CAPELLI, G. GARBIERI. ***Corso di analysi algebrica.*** Volume Primo. Teorie introduttorie. Padova, Premiata tipografia edit. F. Sacchetto, 1886. Un volume in-8° de VII-511 pages. Prix : 12 francs.

Le premier volume de l'ouvrage considérable dont MM. A. Capelli, professeur à l'Université de Palerme, et G. Garbieri, professeur à l'Université de Padoue, viennent de commencer la publication, est subdivisé comme il suit. I. ***Opérations avec les nombres réels*** (Nombres commensurables, incommensurables, élévation à une puissance quelconque, logarithmes; limites; fractions continues; théorie des séries réelles). II. ***Opérations avec les nombres imaginaires ou complexes*** (Représentation géométrique des imaginaires, opérations, racines primitives de l'unité,

---

(*) Faute de temps, nous ne pouvons publier que rarement des comptes rendus critiques et détaillés des ouvrages qu'on veut bien soumettre à notre appréciation. D'autre part, les simples annonces de la troisième page de la couverture de chaque livraison de ***Mathesis*** sont insuffisantes pour donner à nos lecteurs une idée des sujets abordés dans les ouvrages qui y sont cités. Nous avons donc résolu de faire paraître plus souvent que nous ne l'avons fait jusqu'à présent, dans le texte même de notre recueil, sur chaque ouvrage envoyé à la Rédaction, une notice sommaire, intermédiaire entre une analyse détaillée et une simple indication du titre.

Digitized by Google

séries imaginaires). III. *Opérations combinatoires* (Permutations, combinaisons, substitutions). IV. *Théorie des déterminants*. V. *Équations linéaires* (résolution; déterminants nuls; substitutions linéaires). VI. *Propriétés fondamentales des fonctions entières*, d'une ou de plusieurs variables (divisibilité; interpolation; théorème de Taylor; continuité. Définition et propriétés de la dérivée). Les sujets traités dans ce premier volume, sont, comme on le voit, sans grande liaison; mais les questions abordées sont précisément toutes celles qui, en algèbre et analyse élémentaire, présentent le plus de difficultés : la théorie des nombres incommensurables et des imaginaires, celle des séries et de la divisibilité des polynômes. D'après un Compte rendu publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1886, (2) X, 1re partie, pp. 236-238) par un géomètre très compétent sur ces matières délicates, M. J. Tannery, les savants auteurs ont su allier la rigueur à la simplicité dans l'exposé des diverses théories préliminaires qu'ils ont traitées; dans leur ouvrage, ils en ont poussé l'étude assez loin pour que le lecteur puisse aborder les parties élevées de la science et cependant, ils ont eu le difficile mérite de se restreindre aux choses essentielles.

Cours d'Algèbre élémentaire, par Léon Lecointe, professeur honoraire de mathématiques supérieures, directeur des études scientifiques à l'institut Dupuich, etc., etc. Troisième édition. Bruxelles, chez l'auteur et chez Decq; Namur, Wesmael-Charlier, 1886. Un volume in-8° de XII, 436 pages. Prix : 8 francs.

Sommaire : *Prolégomènes :* Définition de l'Algèbre; notations algébriques; réduction des termes semblables; résultats négatifs. *Préliminaires :* Mise en équation de quelques problèmes. 1. Les quatre opérations algébriques; fractions algébriques. Symboles a^0; 0^0. 2. Divisibilité d'un polynôme par $x \pm a$; symboles 0, $(0 : 0)$, $(\infty : \infty)$, etc. 3. Carré et racine carrée des quantités algébriques. Calcul des radicaux du second degré. 4. Principes généraux sur les équations; résolution de l'équation du premier degré à une inconnue. Des inégalités. 5. Méthodes d'élimination. Résolution des équations du premier degré; applications; résolution d'inégalités. 6. Interprétation et théorie des solutions dites négatives. 7. Résolution et discussion d'un système d'équations du premier degré à une, deux ou trois inconnues. Loi de Cramer. 8. Équations du second degré. 9. Résolution de deux équations du second degré. Équations du quatrième degré réductibles au second. Simplification de $\sqrt{(A + \sqrt{B})}$. Propriétés des trinômes du second degré. Maximums et minimums du second degré. 10. Théorie des fractions continues. Une fraction continue périodique a pour génératrice la racine d'une équation du second degré et réciproquement. 11. Analyse indéterminée du premier degré. 12. Arrangements, permutations, combinaisons; binôme de Newton; puissance d'un polynôme. 13. Racines des nombres et des quantités littérales. Théorie des exposants quelconques. Théorie des imaginaires du second degré. 14. Théorie des radicaux à valeurs multiples. 15. Progressions. 16. Équation exponentielle. 17. Logarithmes. Intérêts composés; annuités. 18. Théorie du plus grand commun diviseur algébrique. 19. Notions sur les dérivées. 20. Méthode des coefficients indéterminés.

Digitized by Google

Applications aux séries récurrentes; à la décomposition des fractions rationnelles; à la recherche des séries binomiales, logarithmiques, exponentielles. 21. Théorie des déterminants à deux ou à trois lignes. — L'ouvrage de M. Lecointe contient un grand nombre de remarques personnelles, d'applications et d'exemples intéressants relatifs à toutes les théories qui y sont exposées, mais nous croyons que la plupart des questions où aurait dû intervenir la méthode des limites, ne sont pas exposées avec une précision ou une rigueur suffisantes. Nous faisons aussi nos réserves relativement à l'introduction des idées de Wronski dans plusieurs chapitres. Au point de vue de la forme, le *Cours d'Algèbre élémentaire* a les allures familières, originales d'un cours plutôt que d'un traité.

Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, par JULES TANNERY. Paris, A. Hermann, 1886. Un volume in-8° de XII-401 pages. Prix : 12 francs.

Ouvrage très rigoureux et très bien fait sur les principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et sur les notions préliminaires relatives aux incommensurables, aux limites et aux séries. Voici les titres des grandes subdivisions : I. Des nombres irrationnels et des limites. II. Séries et produits infinis. III. Premiers principes de la théorie des fonctions d'une variable (continuité; définition de a^x, par la relation $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y)$, etc.). IV. Séries et produits infinis dont les termes sont fonctions de la variable. V. Dérivées (recherche; théorème de Rolle, de Taylor; vraies valeurs; maxima et minima, etc.). VI. Intégrales définies simples (principes fondamentaux). VII. Sur quelques développements en série (série de Taylor et de Maclaurin; formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin; séries trigonométriques). Pour un compte rendu détaillé de l'ouvrage, voir le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1886, (2) X, 1re partie, pp. 283-293.

Algèbre pure et appliquée aux sciences commerciales, à l'usage des élèves s'adonnant à l'étude des sciences commerciales et des personnes s'occupant d'opérations financières, par J. DEROUSSEAU, professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Liège. Liège, Vaillant-Carmanne, 1887. Un volume grand in-8° de VII-139 pages. Prix : fr. 3-50.

Voici l'indication sommaire des matières contenues dans cet ouvrage, qui, d'après un compte rendu détaillé, publié récemment dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, contient un exposé clair, concis et suffisamment complet des différentes questions qui y sont abordées. 1. Équations du second degré. 2. Progressions. 3. Exposants négatifs. 4. Logarithmes. 5. Intérêt. 6. Escompte. 7. Mélanges (poids spécifiques, titre). 8. Rentes. Table des valeurs actuelles d'une rente de n termes d'un franc, le taux étant 3, 3 1/2, 4, 4 1/2 ou 5 pour cent. Rentes viagères, assurances sur la vie. 9. Emprunts remboursables par des rentes à termes constants. 10. Rentes à termes variables. 11. Spéculations financières ou arbitrages. 12. Tables pour les calculs relatifs aux intérêts composés et aux annuités. Des exercices assez nombreux se trouvent à la fin de chaque paragraphe. (P. M.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 173 et 174.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 176.)

173. *Aucune des équations*

$$x^4 - p^2x + 3q^2 = 0, \qquad [1]$$

$$x^4 - 2p^2x + 3q^2 = 0, \qquad [2]$$

dans lesquelles p est un nombre pair, et q un entier différent de zéro, ne peut avoir de racine entière. (S. Realis.)

174. *L'équation*

$$x^4 - 4p^2x + 3q^2 = 0, \qquad [3]$$

dans laquelle p et q sont des entiers premiers entre eux, q étant plus grand que l'unité, n'a pas de racine entière. (S. Realis.)

Solution par M. Fauquembergue, *professeur au lycée de Mont-de-Marsan.* Ces propositions sont des cas particuliers d'une proposition beaucoup plus générale, qu'on peut énoncer ainsi :

L'équation

$$x^4 - Ap^2x + 3q^2 = 0, \qquad [\alpha]$$

ne peut avoir de racine commensurable, quels que soient p et q, pour toute valeur de A *telle que l'équation*

$$X^3 + Y^3 = 2AZ^3$$

soit impossible en nombres rationnels (on excepte, bien entendu, les solutions insignifiantes).

En effet, en vertu de l'identité

$$(L^3 + M)^3 + (L^3 - M)^3 = 2L^3(L^6 + 3M^2),$$

l'équation (α) peut s'écrire

$$(x^2 + q)^3 + (x^2 - q)^3 = 2A(px)^3.$$

Dans le cas où A est une puissance de 2, on obtient les équations de Realis. Or, on sait que l'équation

$$X^3 + Y^3 = 2^mZ^3,$$

est impossible pour toute valeur de m(*).

(*) Legendre, *Théorie des Nombres*, 3me édition, t. II, p. 9.

Digitized by Google

On remarquera que les restrictions que p soit pair dans les équations (1) et (2), et p et q premiers entre eux dans l'équation (3), sont inutiles.

On pourrait, d'après les travaux de MM. Sylvester, Lucas, Pépin, etc., sur l'équation

$$X^5 + Y^5 = cZ^5,$$

assigner à A une infinité de valeurs rendant l'équation (α) impossible en nombres rationnels.

Question 397.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 248.)

On donne une conique et deux points quelconques; on mène par ces points deux sécantes qui rencontrent la courbe en quatre points d'une même circonférence. Trouver le lieu du centre de cette circonférence. (ALLERSMA.)

Solution par M. VERNIORY. Prenons pour axes la droite qui joint les points donnés A et B, et la perpendiculaire au milieu de AB. Soient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$
$$y = m(x - \alpha), \quad y = n(x + \alpha),$$

les équations de la conique donnée et des deux sécantes menées par A et B. L'équation de la circonférence sera

$$Ay^2 + \cdots + F - K(y - mx + m\alpha)(y - nx - n\alpha) = 0,$$

avec les conditions

$$A - K = C - Kmn, \quad B + K(m + n) = 0. \tag{1}$$

Le centre du cercle satisfait aux équations

$$2(A - K)x + E = 0, \quad 2(A - K)y + D - K\alpha(m - n) = 0. \tag{2}$$

Il reste à éliminer m, n, K entre les égalités (1) et (2), ce qui se fait aisément au moyen de l'identité

$$(m + n)^2 = (m - n)^2 + 4mn.$$

On trouve, d'abord,

$$\frac{B^2}{K^2} = \frac{[2(A - K)y + D]^2}{K^2\alpha^2} + 4\frac{C - A + K}{K},$$

et ensuite

$$(Dx - Ey)^2 + \alpha^2(2Ax + E)(2Cx + E) - \alpha^2B^2x^2 = 0. \tag{3}$$

Le lieu cherché est une conique, du même genre que la proposée. Si

Digitized by Google

celle-ci est une hyperbole équilatère, la première a son centre au milieu de AB.

Quand les points A et B se confondent, le centre de la circonférence variable décrit une droite.

Pour que l'équation (3) représente une circonférence, on doit avoir

$$D = 0, \quad \alpha^2 (4AC - B^2) = E^2.$$

Ont résolu la même question MM. P. Bastin et Deprez.

Question 432.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94.)

Les milieux des côtés d'un triangle, le centre du cercle circonscrit à ce triangle, un sommet et l'intersection du côté opposé avec la tangente en ce point au cercle circonscrit se trouvent sur une même hyperbole équilatère.

(H. Brocard.)

Solutions par M. Mosnat, *professeur au lycée de Toulon. Première solution.* Désignons par A', B', C', les milieux des côtés du triangle ABC et par O, le centre du cercle circonscrit.

Les cinq points A, O, A', B', C' définissent une hyperbole équilatère, puisque O est le point de concours des hauteurs du triangle A'B'C'. Cette conique coupe le côté BC en un autre point a. L'angle OA'a inscrit dans la courbe est droit; donc l'angle OAa est aussi droit, d'après le théorème de Frégier (ou plutôt, d'après un corollaire de ce théorème) et la droite Aa est bien tangente en A au cercle circonscrit.

Deuxième solution. Le centre de la conique passant par les points A, B, C, A', O est le milieu I de B'C'. Les deux cordes supplémentaires AC', AB' doivent être également inclinées sur les asymptotes, ce qui montre que ces asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle A.

Soit a' le symétrique du point a par rapport au centre I. La droite Aa' est parallèle à BC, et les deux droites Aa', Aa sont également inclinées sur AB et sur AC. On en conclut que l'angle CAa est égal à l'angle BAa' c'est-à-dire à l'angle B du triangle ABC, ce qui montre que la droite Aa est tangente en A au cercle circonscrit.

Troisième solution. Appliquons le théorème de Pascal à l'hexagone aAC'OB'A'a et désignons le point de rencontre de OB' et Aa par D, celui de A'O et AB par E; la droite DE est parallèle à la base BC. Mais les

Digitized by Google

angles EAO, EDO sont complémentaires de l'angle C, et le quadrilatère EADO est inscriptible; donc l'angle OAa est droit.

Autres solutions. 1. Soit Aa la tangente au cercle ABC. Les faisceaux (A, B'C'a) et (A', B'C'a) sont inversement égaux; donc les rayons homologues se coupent sur une hyperbole équilatère (FARISANO).

2° On sait que le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère ABCD est une conique passant par les milieux des côtés et des diagonales, et par les points de concours des côtés opposés et des diagonales. Si l'on suppose D infiniment voisin de A sur la circonférence ABC, on aura le théorème de M. Brocard (DEPREZ).

3° Prenons pour axes de coordonnées les côtés AB et AC, et posons AB $= 2c$, AC $= 2b$. On trouve facilement pour l'équation d'une conique circonscrite au parallélogramme AB'A'C' :

$$y(y - b) - \lambda x(x - c) = 0. \qquad (1)$$

Pour que la courbe soit une hyperbole équilatère, il faut que $\lambda = 1$. Cette condition a pour conséquence de faire passer la conique par le centre du cercle ABC, orthocentre du triangle A'B'C'.

Les coordonnées de tout point de la tangente Aa menée au cercle ABC sont proportionnelles à c et b (c'est ce que l'on voit facilement au moyen d'un triangle semblable à ABC); l'équation de Aa est donc $bx + cy = 0$. On peut maintenant calculer les coordonnées du point de rencontre de Aa avec BC et constater qu'elles vérifient l'équation (1) (DEPREZ, GILLET, BOEDT et VERNIORY).

Comparez *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, IV, p. 61.

×Question 469.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

Résoudre l'équation

$$\sin(a - x)\sin(b - x)\sin(c - x)\sin(d - x) = \sin^4 x,$$

sachant que $a + b + c + d = 2\pi$. (TUCKER.)

Solution d'après M. TUCKER. On a

$$\sin(a - x) = \sin a \sin x (\cot x - \cot a), \ldots;$$

Digitized by Google

par conséquent, si l'on désigne par c_1 la somme des cotangentes de a, b, c, d, par c_2, c_3, c_4 la somme des produits de ces lignes 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, on a

$$\cot^4 x - c_1 \cot^3 x + c_2 \cot^2 x - c_3 \cot x + c_4 = \text{cosec } a \text{ cosec } b \text{ cosec } c \text{ cosec } d.$$

Mais, si l'on développe $\sin(a+b+c+d)$ et $\cos(a+b+c+d)$ et qu'on divise les résultats par $\sin a \sin b \sin c \sin d$, on trouve

$$c_1 = c_3, \quad \text{cosec } a \text{ cosec } b \text{ cosec } c \text{ cosec } d = 1 - c_2 + c_4.$$

L'équation en $\cot x$ peut alors prendre la forme

$$\cot^4 x - 1 - c_1 \cot x (\cot^2 x + 1) + c_2 (\cot^2 x + 1) = 0,$$

ou, après suppression du facteur $\cot^2 x + 1$,

$$\cot^2 x - c_1 \cot x + c_2 - 1 = 0.$$

Lorsque $a + c = b + d = \pi$, on a $c_1 = 0$, $c_2 = \cot^2 a + \cot^2 b$; donc

$$\cot^2 x = 1 + \cot^2 a + \cot^2 b, \quad \text{cosec}^2 x = \text{cosec}^2 a + \text{cosec}^2 b.$$

M. Verniory a donné une bonne solution de la question en ramenant l'équation à la forme

$$A \sin 2x + B \cos 2x = C.$$

×Question 483.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 263.)

Soient O, I, I′ *les centres du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit qui touche* BC *intérieurement*; *démontrer que*

$$\text{tang IOI}' = \pm \frac{2(\sin B - \sin C)}{2 \cos A - 1}. \qquad \text{(Leudesdorf.)}$$

Solution par M. Mosnat (*Toulon*). Dans le triangle OII′, on a

$$\overline{\text{II}'}^2 = \overline{\text{OI}}^2 + \overline{\text{OI}'}^2 - 2\text{OI} \cdot \text{OI}' \cos \text{IOI}',$$
$$\text{OI} \times \text{OI}' \sin \text{IOI}' = \text{II}' \times \text{R} \cdot \sin \text{OAI}.$$

Les deux triangles AOI, AOI′ donnent

$$\overline{\text{OI}}^2 = \text{R}^2 + \overline{\text{AI}}^2 - 2\text{R} \cdot \text{AI} \cos \text{OAI},$$
$$\text{OI}'^2 = \text{R}^2 + \overline{\text{AI}'}^2 - 2\text{R} \cdot \text{AI}' \cos \text{OAI}.$$

On tire de là

$$\text{tang IOI}' = \frac{\text{II}' \cdot \text{R} \cdot \sin \text{OAI}}{\text{R}^2 + \text{AI} \cdot \text{AI}' - (\text{AI} + \text{AI}')\,\text{R} \cos \text{OAI}}.$$

Digitized by Google

Mais, dans le triangle ABC,

$$AI = \frac{p-a}{\cos\frac{1}{2}A}, \quad AI' = \frac{p}{\cos\frac{1}{2}A}, \quad OAI = \pm\frac{B-C}{2};$$

d'où

$$II' = \frac{a}{\cos\frac{1}{2}A}; \quad AI \times AI' = \frac{p(p-a)}{\cos^2\frac{1}{2}A} = 4R^2 \sin B \sin C$$

$$AI + AI' = \frac{2p-a}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{b+c}{\cos\frac{1}{2}A} = \frac{2R(\sin B + \sin C)}{\cos\frac{1}{2}A} = 4R\cos\frac{B-C}{2}.$$

Il vient donc en remplaçant :

$$\operatorname{tang} IOI' = \frac{\pm 4 \sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{1 + 4\sin B \sin C - 4\cos^2\frac{B-C}{2}}$$

$$= \frac{\pm 2(\sin B - \sin C)}{1 + 2\cos(B-C) - 2\cos(B+C) - 4\cos^2\frac{B-C}{2}} = \frac{\pm 2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}.$$

Solution analogue par MM. Deprez (Dinant) et de Ceunynck (Ostende). Soient N, N' les projections de I, I' sur une parallèle à BC par O. On trouve, en supposant $A < 90°$, $b > c$

$$\operatorname{tang} ION = \frac{IN}{ON}, \quad \operatorname{tang} I'ON' = \frac{I'N'}{ON'}.$$

Or

$$IN = r - R\cos A = R(\cos B + \cos C - 1),$$

$$I'N' = R(\cos B + \cos C + 1), \quad ON = ON' = \tfrac{1}{2}(b-c);$$

donc

$$\operatorname{tang} ION = \frac{\cos B + \cos C - 1}{\sin B - \sin C}, \quad \operatorname{tang} I'ON' = \frac{\cos B + \cos C + 1}{\sin B - \sin C}.$$

Mais

$$\text{angle } IOI' = ION + 180° - I'ON', \text{ etc.}$$

M. Deprez signale la relation

$$\operatorname{tang} I''OI''' = \frac{2(\sin B + \sin C)}{2\cos A + 1},$$

dans laquelle I'' et I''' sont les centres des deux autres cercles exinscrits. Il tire aussi, de la question proposée, la conclusion suivante : *Lorsque* $A = \frac{1}{3}\pi$, *la circonférence* BICI' *passe par* O ; ce théorème résulte également des valeurs des angles BOC, BIC. (J. N.)

Digitized by Google

×Question 487.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 263.)

Soient AH *la hauteur du triangle* ABC, M *le milieu de* BC, B′ *et* C′ *les projections de* B *et* C *sur la bissectrice de l'angle* BAC, A′ *le point de concours des perpendiculaires abaissées de* B′ *sur* AC *et de* C′ *sur* A′B. *On sait que* A′ *est sur la hauteur* AH *et que les cinq points* B′, M, C′, H, A *sont sur une même circonférence. Cela posé :* 1° *Calculer les longueurs* A′M, A′H, A′B′ *en fonction des éléments du triangle* ABC; 2° *démontrer que* BC *et l'angle* A *restant constants, le point* A′, *le point de concours des hauteurs et le centre du cercle des neuf points du triangle* A′B′C′ *décrivent des circonférences.* (Deprez.)

Solution par MM. Mosnat, A. Boedt *et* Verniory. 1° Supposons $b > c$. La droite BB′ rencontre AC en un point P tel que $AP = c$, $B'M = \frac{1}{2}PC = \frac{1}{2}(b - c)$. L'angle A′B′M étant droit et $MA'B' = \frac{1}{2}A$, l'on a

$$A'M = \frac{b-c}{2\sin\frac{1}{2}A}, \quad A'B' = \tfrac{1}{2}(b-c)\cot\tfrac{1}{2}A, \quad A'H = \frac{(b-c)\sin\frac{1}{2}(B-C)}{2\sin\frac{1}{2}A}.$$

2° Le cercle BAC étant fixe, la bissectrice de l'angle BAC tourne autour du milieu D de l'arc sous-tendu par BC, et le point de concours I des droites A′M, AD parcourt la circonférence décrite sur DM comme diamètre.

Le quadrilatère MB′A′C′ restant toujours semblable à lui-même, les rapports de MI à MA′ et aux distances de M à l'un des points remarquables du triangle isoscèle A′B′C′ restent constants; donc A′ et ces points décrivent des circonférences.

Les points B′ et C′ décrivent les circonférences BMD, CMD, qui ont pour diamètres BD et CD.

Remarque. Il est facile de calculer les rayons des différentes circonférences. Comme $MD = \frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}A$, on obtient le diamètre du cercle décrit par un point remarquable N du triangle A′B′C′ en multipliant MD par le rapport MN : MI. (Deprez.)

Digitized by Google

QUESTIONS D'EXAMEN.

309. Sur une même base AB, on construit trois triangles isoscèles ABC, ABC', ABC'', dont les hauteurs sont respectivement égales à $\frac{1}{2}$ AB, AB, $\frac{3}{2}$ AB. Démontrer que la somme des angles ACB, AC'B, AC''B est égale à deux angles droits (Par la trigonométrie ou la géométrie).

310. Lieux des centres et des foyers des hyperboles équilatères pour lesquelles on connaît un sommet et un point d'une asymptote (Par la Géométrie : Circonférences).

311. Soient AA', BB', CC' les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle ABC sur une droite quelconque. Démontrer que

$$AB'C' + BC'A' + CA'B' = ABC.$$

312. Etant donnés, dans l'espace, deux segments de droite AB, A'B', trouver le lieu d'un point M tel que les triangles MAB, MA'B' soient semblables.

313. Étant donnés, dans l'espace, deux triangles semblables ABC, A'B'C', trouver un point M tel que les pyramides MABC, MA'B'C' soient semblables.

314. Si, dans le quadrilatère ABCD, les angles opposés B et D sont droits, la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du sommet C sur les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A, passe par le milieu de la diagonale BD. (D'OCAGNE.)

315. Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène des perpendiculaires AB' à AB, AC' à AC. Si B', C' sont les points de rencontre de ces droites avec BC, démontrer que les circonférences ABC, AB'C' se touchent en A. (H. BROCARD.)

316. Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur les côtés AB, AC et la médiane AM d'un triangle ABC interceptent sur la hauteur AH deux segments égaux. (H. BROCARD.)

317. La droite qui joint l'orthocentre H au milieu du segment intercepté par les hauteurs BH, CH sur le rayon OA du cercle ABC, est perpendiculaire à la symédiane AK. (H. BROCARD.)

Les deux derniers théorèmes se démontrent par la considération d'un faisceau harmonique coupé par une transversale parallèle à un rayon.

318. Construire un quadrilatère ABCD, connaissant les milieux E et F de deux côtés opposés AB et CD, l'angle des diagonales et la somme de ces

Digitized by Google

lignes, le rapport de deux côtés opposés et la somme des carrés des deux autres côtés. (BORDAGE.)

On détermine facilement les milieux des droites BC, AD, AC, BD.

QUESTIONS PROPOSÉES.

565. On donne un triangle ABC. 1° Trouver la condition géométrique pour que la hauteur issue du point A, la bissectrice issue du point B, et la médiane issue du point C se coupent en un même point M. 2° Démontrer que si le triangle ABC varie le côté BC restant fixe, le point A décrit une conchoïde de droite, et le point M une cissoïde. 3° Trouver les lieux géométriques de l'orthocentre et du centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. (BOUBALS.)

566. Un ellipsoïde se déplace parallèlement à lui-même, et son centre décrit un cercle fixe. Trouver le lieu des courbes de contact des cylindres circonscrits à l'ellipsoïde, parallèlement à une direction fixe.

(H. BROCARD.)

***567.** Un triangle ABC étant circonscrit à un cercle de rayon r, on mène une tangente quelconque PQ, qui rencontre AB et AC en P et Q. Si p, q sont les distances de ces points à BC, démontrer que

$$\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} = \text{const.}$$ (LAURENS.)

***568.** Soit MN une corde, normale à une ellipse à l'une de ses extrémités, et P le pôle de MN. Trouver le maximum de l'angle MPN.

RECTIFICATIONS.

Dans le supplément de la livraison de mars, il faut faire les corrections suivantes : p. 23, ligne 2, et p. 29, dernière ligne, au lieu de 21, mettre 19; p. 34, ligne 9, en remontant, au lieu de 33, mettre 31; p. 96, ligne 8, en remontant, au lieu de 76, mettre 74.

Digitized by Google

SUR LES POINTS COMPLÉMENTAIRES(*);

par M. Ém. Vigarié, élève de l'École des Mines (Paris).

(Fin; voir *Mathesis*, t. VII, pp. 6, 57 et 84.)

III. Sur l'anticomplémentaire du point de Lemoine(**).

19. Dans la livraison de septembre 1885 de l'*Educational Times* (question 8253), M. Brocard a énoncé le théorème suivant : *Étant donné un triangle* ABC, *projetons deux des sommets sur la parallèle au côté opposé menée par le troisième sommet; nous obtenons ainsi trois rectangles* $BCC_\alpha B_\alpha$, $CAA_\beta C_\beta$, $ABB_\gamma A_\gamma$ *dont les centres* A'', B'', C'' *forment un triangle homologique à* ABC. *Le centre d'homologie est un certain point* Λ *situé sur* HD *et sur* GK, *et tel que l'on a* $G\Lambda = 2GK$ (D est le centre d'homologie de ABC et du premier triangle de Brocard). *L'axe d'homologie est une certaine droite* λ *perpendiculaire à* OΛ. *Enfin, l'inverse de* Λ *se trouve sur la droite* OGH.

Pour démontrer cette proposition, prolongeons les droites $B_\alpha C_\alpha$, $C_\beta A_\beta$, $A_\gamma B_\gamma$ jusqu'à leur rencontre; nous obtiendrons ainsi le triangle $A'_1B'_1C'_1$, anticomplémentaire de ABC. On sait que les centres des rectangles inscrits à $A'_1B'_1C'_1$ et dont un côté repose sur $B'_1C'_1$ sont sur la droite joignant le milieu A de $B'_1C'_1$ au milieu A''_1 de la hauteur menée de A'_1 sur $B'_1C'_1$; cette droite passe évidemment par A'', et A''_1 est, sur BC, l'isotomique du pied H_a de la hauteur AH du triangle ABC. D'autre part, d'après un théorème dû à M. Lemoine, les droites qui joignent les

(*) Parmi les constructions du point complémentaire d'un point donné M, il convient de citer la suivante qui est due à M. d'Ocagne et dont la démonstration est un utile exercice pour nos jeunes lecteurs : *Si m, m', m'' sont les symétriques du point* M *par rapport aux milieux des côtés du triangle* ABC, *les droites* Am, Bm', Cm'', *concourent en un même point* M', *qui est le complémentaire de* M. (J. N.)

(**) M. Tücker vient d'énoncer dans l'*Ed. Times* (mai 1887, question 9904) des propriétés fort curieuses de deux points qui ont pour coordonnées barycentriques (cot B, cot C, cot A), (cot C, cot A, cot B); ces points sont, d'après la terminologie de M. de Longchamps (J. M. E., 1886, p. 230), les *brocardiens* de l'orthocentre ou les *isobariques* du point Λ. (J. N.)

Digitized by Google

milieux des côtés d'un triangle $A'_1B'_1C_1$ aux milieux des hauteurs correspondantes se coupent au point de Lemoine. Il résulte de là que *les droites* AA'', BB'', CC'' *se coupent en un même point* Λ, *qui est l'anticomplémentaire du point de Lemoine* K *de* ABC *et le réciproque de l'orthocentre* H *de* ABC.

Les points complémentaires K et Λ sont en ligne droite avec le centre de gravité G, et l'on a $G\Lambda = 2GK$.

Le centre O du cercle ABC_1 le point de Lemoine K, et le milieu S de la distance des points de Brocard Ω, Ω' étant en ligne droite, il en est de même de leurs anticomplémentaires H, Λ et D(*).

En partant des coordonnées barycentriques de K (a^2, b^2, c^2) ou de celles de H (tg A, tg B, tg C), on trouve pour les coordonnées de Λ

$$-a^2+b^2+c^2,\quad a^2-b^2+c^2,\quad a^2+b^2-c^2 \quad \text{ou} \quad \cot A,\ \cot B,\ \cot C.$$

Les coordonnées normales de Λ étant

$$\frac{\cos A}{\sin^2 A},\quad \frac{\cos B}{\sin^2 B},\quad \frac{\cos C}{\sin^2 C},$$

celles de son inverse peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\cos A}-\cos A,\quad \frac{1}{\cos B}-\cos B,\quad \frac{1}{\cos C}-\cos C.$$

On voit que l'inverse de Λ est situé sur la droite joignant les points O (cos A, ...) et H (séc A, ...).

Cherchons l'équation de la droite λ en coordonnées barycentriques. Les points A'', B'', C'' sont les pieds des hauteurs du triangle complémentaire $A_1B_1C_1$. Si l'on prend ce dernier pour triangle de référence, l'équation de B''C'' est

$$-x\cot A+y\cot B+z\cot C=0.$$

Pour passer au triangle de référence ABC, il suffit de remplacer x, y, z

---

(*) Les coordonnées barycentriques de D, Ω, Ω' sont :

$$\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2};\quad \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2},\ \frac{1}{a^2};\quad \frac{1}{c^2},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2}.$$

Le centre de gravité du triangle DΩΩ' est donc G, et D est l'anticomplémentaire de S. Comparez *Nouvelles propriétés du triangle par* H. Brocard, Ass. fr., 1883, et *Journal de Bourget*, M. E., 1883.

Digitized by Google

par $-x+y+z$, $x-y+z$, $x+y-z$. Des équations de B″C″, C″A″, A″B″, on conclut facilement celle de λ; on trouve ainsi :

$$\frac{x}{-\cot A+\cot B+\cot C}+\frac{y}{\cot A-\cot B+\cot C}+\frac{z}{\cot A+\cot B-\cot C}=0,$$

ou

$$(\cot^2 A-\cot^2 B-\cot^2 C+2\cot B\cot C)\,x+\cdots=0. \qquad (1)$$

Le polaire de Λ par rapport au cercle ABC a pour équation

$$(b^2\cot C+c^2\cot B)\,x+\cdots=0,$$

ou, si l'on remplace a^2, b^2, c^2 par les quantités proportionnelles $\cot B+\cot C$,.. :

$$(\cot^2 B+\cot^2 C+\cot A\cot B+\cot A\cot C)\,x+\cdots=0. \qquad (2)$$

Si l'on ajoute les égalités (1) et (2) après avoir multiplié la dernière par 2, on trouve l'équation de la droite de l'infini. Donc λ est parallèle à la polaire de Λ par rapport au cercle ABC; par suite, elle est perpendiculaire à OΛ.

20. Les coordonnées normales absolues de Λ sont

$$h_a\cot A\operatorname{tg}V,\quad h_b\cot B\operatorname{tg}V,\quad h_c\cot C\operatorname{tg}V,$$

V désignant l'angle de Brocard, et h_a, h_b, h_c les hauteurs de ABC. On en déduit pour les longueurs des parallèles aux côtés de ABC menées par Λ et limitées par les angles A, B, C :

$$\frac{2Ra^2}{bc}\operatorname{tg}V,\quad \frac{2Rb^2}{ca}\operatorname{tg}V,\quad \frac{2Rc^2}{ab}\operatorname{tg}V.$$

On voit que *ces parallèles sont proportionnelles aux cubes des côtés de* ABC.

MM. Lemoine et Tucker avaient déjà remarqué que les parallèles à deux côtés de ABC menées par K interceptent sur le troisième côté un segment proportionnel au cube de ce côté. Or, en général, si par un point quelconque du plan d'un triangle ABC, on mène des parallèles α, β, γ

(*) Dans la *Note sur le centre des médianes antiparallèles*, M. Neuberg avait déjà remarqué que le point de Lemoine de ABC est, par rapport au triangle complémentaire $A_1B_1C_1$, le réciproque de l'orthocentre de $A_1B_1C_1$. Pour ce théorème, voir aussi : Tucker, *Quarterly Journal*, vol. XX, n° 78; d'Ocagne, N. A. M., août 1885; Boubals, *Bourget, Math. El.* 1885, p. 240; Vigarié, Ib., p. 191; Neuberg, *Ed. Times*, juillet 1885.

Digitized by Google

aux côtés, le segment de a compris entre β et γ est égal au segment de α compris entre les côtés A_1B_1, A_1C_1 du triangle complémentaire. Cette proposition étant combinée avec le théorème de MM. Lemoine et Tucker, on trouve immédiatement que les parallèles menées par Λ sont proportionnelles à a^3, b^3, c^3.

M. Neuberg a encore signalé (*Ed. Times*, 1885) le théorème suivant, qui est assez curieux : *Dans un triangle acutangle* ABC, *les parallèles aux côtés menées par* Λ *et limitées par les angles opposés sont les sécantes minimum menées par ce point dans les angles de* ABC. Pour démontrer cette proposition, considérons un angle XAY, et un point Z donné à l'intérieur. Menons par Z des parallèles à AX, AY; les segments déterminés sur ces droites par l'angle XAY sont infinis. Faisons maintenant tourner ces parallèles autour de Z dans l'angle qui ne renferme pas le point A, avec des vitesses angulaires telles que leurs segments $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ compris entre AX, AY soient à chaque instant égaux, elles arriveront en même temps à se confondre avec un segment minimum BC. Mais les perpendiculaires élevées au milieu de $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ se coupent en un point U, sommet de deux triangles égaux $U\beta\gamma$, $U\beta'\gamma'$; ce point U est donc sur la bissectrice de l'angle $\beta Z\gamma'$. A la limite, U sera le point de concours des perpendiculaires menées par B, C, Z respectivement sur AX, AY, BC; autrement dit, U sera le point de la circonférence ABC diamétralement opposé à A, et Z sera l'isotomique de pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BC(*).

21. Les distances de Λ aux autres points remarquables du triangle ABC dépendent de formules connues. Ainsi

$$\Lambda G = 2GK, \quad \Lambda K = 3GK, \quad \Lambda H = 2OK.$$

Une partie du n° 19 peut être généralisée de la manière suivante : Soient H un point quelconque du plan ABC, et A_h, B_h, C_h les points de rencontre de AH, BH, CH avec BC, CA, AB. Construisons trois parallélogrammes $BCC_\alpha B_\alpha$, $CAA_\beta C_\beta$, $ABB_\gamma A_\gamma$ dont les côtés CC_α, AA_β, BB_γ sont égaux et parallèles A_hA, B_hB, C_hC; A'', B'', C'' étant les centres de ces parallélogrammes, les triangles ABC, A''B''C'' sont homologiques; le centre d'homologie est le réciproque de H par rapport à ABC; les triangles A''B''C'', $A_hB_hC_h$ sont homothétiques par rapport au centre de gravité G de ABC.

(*) Cette démonstration nous a été communiquée par M. Neuberg.

Digitized by Google

IV. Cercle anticomplémentaire du cercle conjugué.

23. Dans le *J. M. S.*, 1886, pp. 57, 85, 100, 126, M. de Longchamps a étudié un cercle remarquable Δ qu'il définit ainsi : *Des sommets* A, B, C *du triangle de référence comme centres, avec le côté opposé pour rayon, décrivons trois cercles* Δ_a, Δ_b, Δ_c; Δ *est le cercle qui coupe orthogonalement les cercles* Δ_a, Δ_b, Δ_c.

Les cercles Δ_a, Δ_b, Δ_c ont évidemment pour diamètres les côtés $B'_1C'_1$, $C'_1A'_1$, $A'_1B'_1$ du triangle anticomplémentaire de ABC; les axes radicaux de ces cercles sont donc les hauteurs $A'_1H'_a$, $B'_1H'_b$, $C'_1H'_c$ de $A'_1B'_1C'_1$. Par suite, l'orthocentre H'_1 de $A'_1B'_1C'_1$ est le centre radical de Δ_a, Δ_b, Δ_c, et le rayon du cercle orthogonal de Δ_a, Δ_b, Δ_c est égal à

$$\sqrt{H'_1A'_1 . H'_1H'_a} = 2R\sqrt{-\cos A \cos B \cos C} = \sqrt{16R^2 - 2(a^2+b^2+c^2)}.$$

On voit facilement que Δ est le cercle conjugué avec le triangle $A'_1B'_1C'_1$ (cercle autopolaire) ou l'anticomplémentaire du cercle conjugué avec ABC.

Le cercle Δ est imaginaire, lorsque les angles A, B, C sont aigus, et il se réduit à un point, lorsque le triangle ABC est rectangle. Cette circonstance nous indique immédiatement que Δ ne peut passer par un point remarquable (réel) ni toucher une droite ou un cercle remarquables (réels). Mais il jouit d'autres propriétés assez curieuses.

Par exemple, A'_1 étant le pôle de $B'_1C'_1$, une sécante menée par A'_1 rencontre $B'_1C'_1$ en un point I_1 conjugué harmonique de A'_1 par rapport à Δ; donc la circonférence décrite sur AI_1 comme diamètre coupe Δ orthogonalement. Or le centre I de cette circonférence est situé sur BC, et le rayon est égal à la droite AI′ menée parallèlement à AI_1 et limitée en I′ à la droite BC.

Donc, *si* I, I′ *sont deux points isotomiques de* BC, *la circonférence décrite de* I *comme centre avec* AI′ *pour rayon coupe le cercle* Δ *orthogonalement.*

24. On sait que l'équation d'un cercle, en coordonnées barycentriques, est

$$(\alpha+\beta+\gamma)(u\alpha+v\beta+w\gamma) - (a^2\beta\gamma + b^2\gamma\alpha + c^2\alpha\beta) = 0,$$

u, v, w étant les puissances des sommets du triangle de référence. Pour avoir l'équation de Δ, il suffit de poser $u = a^2$, $v = b^2$, $w = c^2$.

L'axe radical de Δ et du cercle ABC a donc pour équation

$$a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0.$$

Digitized by Google

Cette droite que nous proposons d'appeler ***droite de Longchamps***, est l'un des éléments les plus remarquables du plan du triangle ABC. Elle est : 1° *l'axe radical du cercle* ABC, *de son anticomplémentaire et du cercle* Δ; 2° *la transversale réciproque de la droite de Lemoine de* ABC; 3° *la polaire du centre de gravité de* ABC *par rapport à* Δ; 4° *la droite harmoniquement associée au point* D, *centre d'homologie du triangle* ABC *et du premier triangle de Brocard.*

Quant à sa direction, elle est perpendiculaire à la droite d'Euler OGH; elle passe par le réciproque du point de Steiner; enfin elle est parallèle à la droite joignant les réciproques des points de Brocard (*).

SUR LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES QUADRATIQUES (**).

1. *Classification.* D'après la théorie générale des transformations birationnelles (***), celles qui sont quadratiques sont définies par les relations

$$\frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{z'}{W}, \qquad (1)$$

$U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ étant les équations de trois coniques qui ont trois points communs P, Q, R. Les coordonnées x, y, z qui entrent dans

---

(*) En terminant cette Note, nous prions MM. Brocard et Neuberg d'agréer nos vifs remercîments pour les obligeantes communications qu'ils ont bien voulu nous faire. Les passages traitant des *groupes* de Nagel et de Gergonne, sont dus, en grande partie, à M. Neuberg (E. V.)

Voici la définition de quelques termes employés p. 86 : Si les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés correspondants du triangle ABC en D, E, F, soient D', E', F' les conjugués harmoniques de D, E, F par rapport à ces côtés; D'', E'', F'' les isotomiques de D', E', F'; D''', E''', F''' les points qui divisent les côtés additivement dans les rapports $\overline{DB}^2 : \overline{DC}^2$, $\overline{EC}^2 : \overline{EA}^2$, $\overline{FA}^2 : \overline{FB}^2$. Alors la droite D' E' F' est *harmoniquement associée* à M; D'' E'' F'' et D' E' F' sont des *transversales réciproques;* les droites AD''', BE''', CE''' concourent au *deuxième potentiel* de M. (J. N.)

(**) Cet article purement didactique, esquissé il y a bien longtemps par nous, a été rédigé par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand. C'est un commentaire de quelques n^os^ du chapitre VIII des *Higher Plane Curves* de Salmon. Plusieurs des remarques qu'il contient nous ont été suggérées par MM. Neuberg et Servais (P. M.).

(***) Voir N. C. M., 1875, I, p. 54.

Digitized by Google

les fonctions U, V, W, se rapportent à la première figure et sont les distances (prises avec leur signe) d'un point aux côtés du triangle de référence multipliées par des constantes quelconques ; x', y', z' sont des quantités analogues relatives au triangle de référence de la seconde figure.

Aux droites représentées par l'équation $kx' + ly' + mz' = 0$, correspondent les coniques $kU + lV + mW = 0$. L'ensemble des coniques représentées par la dernière équation peut s'appeler *réseau fondamental*. Ces courbes, qui correspondent aux droites de la première figure passent par les trois points P, Q, R.

On peut diviser les transformations birationnelles quadratiques en trois classes, selon que P, Q, R sont distincts, que deux de ces points sont réunis ou enfin que tous trois se confondent. Dans le premier cas, les coniques du réseau fondamental passent par trois points distincts ; dans le second, elles se touchent en un point et se coupent en un second point fixe ; dans le dernier, elles ont même cercle osculateur en un point fixe.

2. *Réduction des transformations birationnelles quadratiques à leur forme la plus simple.* I. *Inversion trilinéaire.* Les trois points P, Q, R sont distincts. Les relations (1) qui lient deux points correspondants peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\frac{k_1x' + l_1y' + m_1z'}{k_1U + l_1V + m_1W} = \frac{k_2x' + l_2y' + m_2z'}{k_2U + l_2V + m_2W} = \frac{k_3x' + l_3y' + m_3z'}{k_3U + l_3V + m_3W} \quad (2)$$

que l'on peut déduire des premières par la théorie des proportions. Chaque fois que le déterminant $| k, l, m |$ est différent de zéro (*), des relations (2) on peut déduire aussi les relations (1) ; elles sont donc équivalentes et définissent la même transformation.

Nous pouvons choisir les quantités k, l, m, de manière que les équations

$$(3) \qquad k_1U + l_1V + m_1W = 0, \quad k_2U + l_2V + m_2W = 0, \quad k_3U + l_3V + m_3W = 0,$$

représentent les couples de droites (PQ, PR) (QP, QR) (RP, RQ), qui

(*) Quand ce déterminant est nul, les trois droites $k_1x' + l_1y' + m_1z' = 0$, $k_2x' + l_2y' + m_2z' = 0$, $k_3x' + l_3y' + m_3z' = 0$ passent par un même point ou deux d'entre elles se réduisent à une seule ; les coniques correspondantes forment un faisceau $S + \lambda S' = 0$ ou deux, au moins, se confondent. Les couples de droites (QP, QR), (PQ, PR), (RP, RQ) dont il est parlé plus bas, ne formant pas faisceau, $| k, l, m |$ n'est pas nul pour ces coniques réduites à des couples de droites.

Digitized by Google

font partie du réseau fondamental. A ces couples de droites correspondent dans la seconde figure trois droites dont les équations sont

$$(4) \qquad k_1x' + l_1y' + m_1z' = 0, \quad k_2x' + l_2y' + m_2z' = 0, \quad k_3x' + l_3y' + m_3z' = 0.$$

Prenons les droites PQ, QR, RP dans la première figure et celles dont nous venons d'écrire les équations dans la seconde figure, comme côtés de deux nouveaux triangles de référence.

Appelons les nouvelles coordonnées (x'', y'', z'') (x''', y''', z''') ; les équations (3) et (4) deviennent :

$$y''z'' = 0, \quad z''x'' = 0, \quad x''y'' = 0,$$
$$x''' = 0, \quad y''' = 0, \quad z''' = 0,$$

et les formules (2) de la transformation se réduisent aux suivantes :

$$\frac{x'''}{y''z''} = \frac{y'''}{z''x''} = \frac{z'''}{x''y''},$$

ou, en supprimant les accents inutiles et en chassant les dénominateurs,

$$xx' = yy' = zz'. \qquad (5).$$

On peut appeler cette transformation *inversion trilinéaire*, parce que l'on passe d'une figure à l'autre en remplaçant les coordonnées trilinéaires d'un point par leurs inverses.

II. *Semi-inversion trilinéaire.* Supposons que les points Q et R soient confondus; de manière que les coniques du réseau aient une tangente commune Qr. Prenons la tangente Qr, la sécante PQ, et une droite quelconque Pr, comme côtés du triangle de référence dans la première figure; les coniques du réseau auront des équations de la forme

$$az^2 + 2hxy + 2yxz = 0.$$

Elles comprennent les couples de droites ayant respectivement pour équations

$$z^2 = 0, \quad xy = 0, \quad xz = 0$$

que nous prendrons pour U, V, W. A chaque couple correspond une droite de la seconde figure. Prenons ces trois droites comme côtés du triangle de référence dans la seconde figure; alors les formules de transformation seront

$$\frac{x'}{z^2} = \frac{y'}{xy} = \frac{z'}{xz}$$

Digitized by Google

ou

$$xx' = zz', \quad \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

La première de ces relations ressemble à celles qui caractérisent l'inversion trilinéaire ; la seconde, au contraire, est analogue à celles qui caractérisent une transformation linéaire. On peut donc appeler la transformation actuelle *semi-inversion trilinéaire*.

III. *Quasi-inversion linéaire.* Si P, Q, R coïncident, les coniques du réseau fondamental ont pour équation

$$ax^2 + 2gzx + 2h(-xy + mz^2) = 0,$$

m ayant la même valeur tandis que a, g, h diffèrent pour les diverses coniques ; $x = 0$ est la tangente commune en P ; $z = 0$ est une autre droite passant par P ; $y = 0$ une droite arbitraire ne passant pas par P.

On en conclut, comme dans le cas précédent, que les formules de transformation peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x'}{x^2} = \frac{y'}{-xy + mz^2} = \frac{z'}{zx}$$

ou encore, après quelques réductions,

$$\frac{x'}{x} = \frac{z'}{z}, \quad xy' + x'y = mzz'.$$

Si m était égal à zéro, la transformation deviendrait linéaire et serait exprimée par les équations

$$\frac{x'}{x} = \frac{-y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

De là le nom de *quasi-inversion linéaire* que nous donnons à cette transformation.

3. *Réversibilité des transformations birationnelles quadratiques.* Soit la figure F, sa transformée quadratique F'. Prenons dans le plan de ces deux figures un nouveau triangle de référence auquel nous rapporterons deux transformées linéaires f et f' des deux figures F et F'. Dans cette hypothèse, un point quelconque du plan aura mêmes coordonnées, quand on le considère comme appartenant à f ou à f'. Nous savons qu'une ligne quelconque de f aura la même équation que sa correspondante

Digitized by Google

dans la figure F. De même pour la figure f'. On passera donc de f à f' au moyen des formules suivantes :

$$\text{I.} \quad xx' = yy' = zz'.$$

$$\text{II.} \quad xx' = zz'; \quad \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

$$\text{III.} \quad xy' + x'y = mzz'; \quad \frac{x'}{x} = \frac{z'}{z}.$$

On peut aussi évidemment faire jouer à F et à son triangle de référence, le rôle que nous attribuons ici à f et au nouveau triangle de référence.

Ces relations étant symétriques par rapport aux coordonnées (x, x') (y, y'), (z, z'), à un point A considéré comme appartenant à la première ou à la seconde figure correspond le même point B; par conséquent, ***les transformations birationnelles quadratiques sont réversibles à une transformation linéaire près.***

On peut donc se borner à considérer seulement des figures ayant comme f et f' même triangle de référence.

BIOGRAPHIE ET BIBLIOGRAPHIE.

Supplément à *Mathesis*.

Nos abonnés trouveront dans le supplément de la présente livraison une étude *sur un groupe de trois paraboles*, par M. H. Brocard Notre dévoué collaborateur nous avait déjà donné des témoignages précieux de ses sympathies en mettant à notre disposition les mémoires qu'il a présentés aux congrès d'Alger (1881) et de Rouen (1883). Aujourd'hui, il offre aux lecteurs de *Mathesis* la continuation de ses intéressantes recherches dans le domaine de la géométrie récente au développement de laquelle il a pris une part si considérable. Nous le prions d'agréer nos bien vifs remercîments au nom de nos abonnés et au nôtre. (P. M. et J. N.)

Chrétien Henri Nagel.

Chrétien Henri Nagel, né à Stuttgart en 1803, mort à Ulm en 1882, a exercé, comme écrivain et comme professeur (1830-1844) ou recteur (1844-1875) de la *Realschule* d'Ulm, une influence considérable sur l'enseignement des mathématiques et l'organisation des écoles professionnelles en Allemagne. Voici la liste de ses productions mathématiques.

1. *Manuel de Géométrie.* Seize éditions, dont la première date de 1833; traductions en italien et en hongrois.

Digitized by Google

2. *Recherches sur les cercles dans le plan du triangle* (1836). Crelle, dans un opuscule publié en 1816 (*Quelques propriétés du triangle rectiligne*), s'était occupé des applications du théorème de Ceva et avait découvert les points de Brocard et la formule $\cot V = \cot A + \cot B + \cot C$ (*Nil novi sub sole!*). C. F. A. Jacobi, le traducteur de Van Swinden, avait ensuite déterminé les points de Brocard par l'intersection des cercles qui passent par deux sommets et touchent l'un des côtés (*Cercles adjoints; Beikreise*, d'après Reuschle); ces recherches ont paru en 1825 dans une brochure intitulée *De quelques propriétés, peu connues, du triangle.* En 1822, Feuerbach avait publié les *Propriétés de quelques points remarquables du triangle, et des lignes et figures déterminées par ces points;* dans ces recherches, on rencontre le fameux théorème sur le contact du cercle des neuf points avec les cercles inscrit et exinscrits. Pour continuer l'étude du triangle inaugurée par Euler, Crelle, Jacobi et Feuerbach, Nagel se propose d'examiner les relations existant entre le cercle circonscrit, le cercle inscrit et les cercles exinscrits ; il parvient à la connaissance du *cinquième point remarquable du triangle*, point qui vient de recevoir la dénomination de *point de Nagel.* Les points complémentaires se rencontrent fréquemment dans cet écrit de Nagel ; c'est pourquoi Reuschle (*Correspondenz-Blatt*, 1864) avait proposé de les appeler *couple nagelien.*

3. *Théorie des fractions décimales périodiques* (1843).

4. *Manuel de Stéréométrie et de Trigonométrie plane* (1838 ; quatre éditions).

5. *Guide pour la résolution des problèmes de Géométrie* (1839).

6. *Analyse géométrique* (1850 ; deux éditions).

(D'après la *Notice nécrologique sur Nagel*, par Otto Kreimmel, dans le *Correspondenz-Blatt*, 1884).

Exercices de Géométrie analytique et de Géométrie supérieure, à l'usage des candidats aux écoles polytechnique et normale et à l'agrégation, par J. Korhler. Première partie : Géométrie plane, Paris, Gauthier-Villars, 1886. Un volume in-8° de VI-347 pages. Prix : 9 fr.

Voici la table des matières de ce livre, que nous nous plaisons à recommander aux professeurs et aux *bons* élèves des cours de mathématiques supérieures ou de la candidature en sciences physiques et mathématiques :

Chap. I. Cercles et Systèmes de cercles. Chap. II. Ellipse, hyperbole, parabole (équations réduites) : § I. Ellipse et hyperbole, tangentes, pôles et polaires, diamètres, triangles inscrits et circonscrits. § II. Propriétés focales de l'ellipse et de l'hyperbole (coordonnées rectilignes et polaires). § III. Parabole. Chap. III. Normales aux coniques. Triangles circonscrits à une conique et inscrits dans une autre. Chap. IV. Coniques définies par l'équation générale du second degré. Systèmes de coniques satisfaisant à des conditions données. Chap. V. Intersection de deux coniques : coniques tangentes et osculatrices. Chap. VI. Coordonnées trilinéaires : § I. Formules fondamentales relatives à la ligne droite. § II. Formules fondamentales de la théorie des coniques. Chap. VII. Applications des coordonnées trilinéaires : § I. Applications à la ligne droite et au cercle.

Digitized by Google

§ II. Applications aux sections coniques. CHAP. VIII. Théorie géométrique des coniques. Transformation des figures. *Appendice.* Sur les triangles et polygones dont les côtés enveloppent des coniques et dont les sommets se meuvent sur d'autres coniques fixes. CHAP. IX. Courbes d'ordre supérieur. § I. Coordonnées cartésiennes. § II. Coordonnées trilinéaires.

Supposant le lecteur initié aux premières difficultés de la science, M. Koehler s'attache de préférence aux questions « *qui sont plus souvent citées que résolues* », à celles qui semblent exiger des méthodes particulières (Polygones de Poncelet, normales aux coniques, etc.). Il développe aussi, sur des exemples variés, les théories que le professeur ne peut guère approfondir dans le cours et qui, cependant, ne peuvent rester inconnues aux étudiants désireux d'acquérir une instruction quelque peu complète et portés aux recherches personnelles. Un chapitre important est consacré à la *Géométrie récente*, qui tend à devenir classique, témoin les manuels du Dr Casey et le *Companion to Weekly Problem papers.* (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

6. ***Sur les médianes, les bissectrices et les symédianes d'un triangle,*** par M. CL. THIRY. ***Dans tout triangle, un plus grand côté est opposée une plus petite médiane, une plus petite bissectrice, une plus petite symédiane.***

(A) $4m_b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3b^2$, $4m_c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2$;

donc si $b > c$, $m_b < m_c$.

(B) $$\beta_b^2 = ac - abc\frac{b}{(a+c)^2}, \quad \beta_c^2 = ab - abc\frac{c}{(a+b)^2};$$

donc si $b > c$, on a, visiblement, $\beta_b^2 < \beta_c^2$.

(C) $$m_b'^2 = \frac{2a^2c^2}{a^2+c^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+c^2)^2}, \quad m_c'^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} - \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2};$$

en mettant les premières parties de $m_b'^2$, $m_c'^2$ sous la forme

$$\frac{2a^2}{\frac{a^2}{c^2}+1}, \quad \frac{2a^2}{\frac{a^2}{b^2}+1},$$

on voit facilement que la relation $b > c$ entraîne $m_b'^2 < m_c'^2$.

De même, l'égalité $b = c$ entraîne $m_b = m_c$, $\beta_b = \beta_c$, $m_b' = m_c'$. Donc d'après une règle connue, les réciproques des propositions précédentes sont également vraies.

7. ***Démonstrations d'une proposition réciproque,*** par CL. THIRY. *Si*

Digitized by Google

dans un triangle ABC, ***la hauteur*** AH ***partage*** BC ***en deux segments*** b', c' ***proportionnels aux carrés des côtés adjacents*** b, c, ***le triangle est isoscèle, ou rectangle en*** A, ***ou bien la différence des angles à la base égale un droit.***

En effet, l'égalité $b^2 : c^2 = b' : c'$, ou $b'^2 + h^2 : c'^2 + h^2 = b' : c'$ se transforme en $(b' - c')(h^2 - b'c') = 0$. Donc on a $b' = c'$ ou $h^2 = b'c'$. Dans le dernier cas, les deux triangles AHB, CHA sont semblables, et les angles ABH, ACH sont complémentaires; si donc la hauteur AH tombe à l'intérieur du triangle ABC, l'angle BAC est droit.

Autrement. On a $h^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$; d'où $b^2 - c^2 = b'^2 - c'^2$, et

$$\frac{b^2}{b'} = \frac{c^2}{c'} = \frac{b^2 - c^2}{b' - c'} = \frac{b'^2 - c'^2}{b' - c'} = \frac{b^2 + c^2}{b' + c'}.$$

Les deux derniers rapports, si $b' \gtrless c'$, entraînent $b^2 + c^2 = (b' + c')^2$; donc si AH tombe à l'intérieur, $b^2 + c^2 = a^2$.

CENTRE ISOLOGIQUE DU TRIANGLE.

Étant donné un triangle quelconque ABC, nous proposons de nommer ***centre isologique*** un point U dont les distances aux sommets sont proportionnelles aux côtés opposés.

Soient D_a, E_a les pieds des bissectrices de l'angle BAC, L_a le milieu de D_aE_a, et D'_a, E'_a, L'_a les isotomiques (symétriques par rapport au milieu de BC) des points D_a, E_a, L_a. On sait que les circonférences d'Apollonius, qui ont pour diamètres D_aE_a, D_bE_b, D_cE_c et dont les centres L_a, L_b, L_c sont sur la droite de Lemoine (polaire de K), se coupent en deux points W, W' situés sur OK et dont les distances à A, B, C sont inversement proportionnelles aux côtés a, b, c du quadrilatère; nous avons appelé ces points ***centres isodynamiques.*** Les circonférences, qui ont pour diamètres $D'_aE'_a$, $D'_bE'_b$, $D_cE'_c$ et dont les centres L'_a, L'_b, L'_c sont sur la droite de Longchamps (tranversale réciproque de la droite de Lemoine), se coupent aux deux centres isologiques U, U' situés sur la droite d'Euler OGH.

Notre attention a été attirée sur ces points par MM. Farisano et W. Tesch; on les rencontre dans les ***Exercices de Géométrie analytique*** par KOEHLER, p. 180. Nous conseillons à nos lecteurs l'étude de ces points et accueillerons volontiers tous les communications à ce sujet. (J. N.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 142.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 120.)

Soit D *un point fixe du plan d'un triangle* ABC. *On décrit trois circonférences quelconques passant respectivement par* B *et* C, C *et* A, A *et* B, *et ayant pour centre radical le point* D. *Démontrer que le centre radical des circonférences symétriques des précédentes par rapport aux côtés* AB, BC, CA *du triangle décrit l'hyperbole équilatère qui passe par* A, B, C, D.

(Van de Berg.)

Nous allons résumer la solution que M. Van de Berg a donnée de cette question dans le *Nieuw Archief voor Wiskunde*, deel VII, pp. 78-90.

Les trois premières circonférences peuvent être représentées en coordonnées normales par les équations

$$ayz + bzx + cxy + lx\,(ax + by + cz) = 0, \qquad (1)$$
$$ayz + bzx + cxy + my(ax + by + cz) = 0, \qquad (2)$$
$$ayz + bzx + cxy + nz\,(ax + by + cz) = 0, \qquad (3)$$

et leurs symétriques par rapport à BC, CA, AB par

$$ayz + bzx + cxy + l'x\,(ax + by + cz) = 0, \qquad (4)$$
$$ayz + bzx + cxy + m'y(ax + by + cz) = 0, \qquad (5)$$
$$ayz + bzx + cxy + n'z\,(ax + by + cz) = 0. \qquad (6)$$

Les axes radicaux des circonférences (1), (2), (3), prises deux à deux, ayant pour équations

$$lx - my = 0, \quad my - nz = 0, \quad nz - lx = 0,$$

on voit que les coordonnées du centre radical D sont inversement proportionnelles à l, m, n. Nous pouvons donc poser

$$l = \frac{\mu}{\alpha}, \quad m = \frac{\mu}{\beta}, \quad n = \frac{\mu}{\gamma},$$

α, β, γ étant les coordonnées de D et μ un paramètre variable. De même, si x, y, z sont les coordonnées du centre radical D′ des circonférences (4), (5), (6), on a

$$l' = \frac{\mu'}{x}, \quad m' = \frac{\mu'}{y}, \quad n' = \frac{\mu'}{z}.$$

Digitized by Google

La tangente menée en B à la circonférence (1) est représentée par

$$ax + x(lb + c) = 0;$$

elle l'est aussi par

$$z = \frac{\sin \alpha}{\sin (B - \alpha)} x,$$

si α est l'angle qu'elle fait avec BC. En identifiant ces équations, on trouve

$$l \sin \alpha + \sin (\alpha - A) = 0.$$

De même, la tangente en B à la circonférence (4) fait avec BC un angle α' donné par

$$l' \sin \alpha' + \sin (\alpha' + A) = 0.$$

Or, on doit avoir $\alpha + \alpha' = 2\pi$; de là, on conclut aisément

$$l + l' + 2 \cos A = 0.$$

Par analogie

$$m + m' + 2 \cos B = 0, \quad n + n' + 2 \cos C = 0.$$

Les équations de condition peuvent être écrites ainsi :

$$\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\mu'}{x} + 2 \cos A = 0, \quad \frac{\mu}{\beta} + \frac{\mu'}{y} + 2 \cos B = 0, \quad \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\mu'}{z} + 2 \cos C = 0.$$

L'élimination de μ et μ' conduit à l'équation du lieu du point D' :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{\alpha} & \cos A \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{\beta} & \cos B \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{\gamma} & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu est visiblement une conique passant par les points A, B, C, D, et par l'orthocentre de ABC (coordonnées : séc A, séc B, séc C); c'est donc une hyperbole équilatère.

M. Deprez a résolu la question 142 en coordonnées obliques, les axes étant deux côtés du triangle ABC. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas d'insérer sa solution.

Digitized by Google

Question 324.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 94.)

Étant donnés un tétraèdre ABCD ***et deux points*** M, M′, ***on mène par ceux-ci les six droites qui s'appuient sur deux arêtes opposées. On obtient ainsi sur les arêtes douze points qui sont sur une même surface du second ordre. Trouver l'équation de cette surface en fonction des coordonnées tétraédriques de*** M ***et*** M′. (J. Neuberg.)

Solution par M. E. Mosnat. Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ les coordonnées des points M, M′; et $m_1, m_2, \ldots, m'_6$ les points considérés. La droite m_1m_2, intersection des plans ABM, CDM a pour équations

$$\frac{z}{\gamma}-\frac{t}{\delta}=0, \quad \frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=0.$$

On peut donc prendre pour coordonnées des points m_1, m_2 : $(0, 0, \gamma, \delta)$, $(\alpha, \beta, 0, 0)$, et pour celles des points m'_1, m'_2 : $(0, 0, \gamma', \delta')$, $(\alpha', \beta', 0, 0)$.

Soit maintenant

$$\Sigma A_{11}x^2 + 2\Sigma A_{12}xy = 0$$

l'équation d'une surface du second ordre. En exprimant qu'elle est vérifiée par les coordonnées des points m_2, m'_2, on trouve

$$A_{11} : A_{22} : 2A_{12} = \frac{1}{\alpha\alpha'} : \frac{1}{\beta\beta'} : -\left(\frac{1}{\alpha\beta'}+\frac{1}{\alpha'\beta}\right).$$

La forme de ce résultat montre qu'il existe une quadrique passant par les douze points m_1, m_2, ... et ayant pour équation

$$\Sigma\frac{x^2}{\alpha\alpha'}-\Sigma\left(\frac{1}{\alpha\beta'}+\frac{1}{\alpha'\beta}\right)xy=0.$$

×Question 371.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 200.)

Si $x^2+y^2+z^2$ ***est un carré,*** $N=[(x^2+z^2)p-(y^2+z^2)q]^2+4x^2y^2pq$ ***est la somme de deux carrés.*** (E. Catalan.)

Solution par M. E. Fauquembergue, *professeur au lycée de Mont-de-Marsan (Landes).* La quantité $(x^2+z^2)(y^2+z^2)-2x^2y^2$ étant désignée par M, l'expression donnée peut s'écrire

$$N=(x^2+z^2)^2p^2-2Mpq+(y^2+z^2)^2q^2.$$

Digitized by Google

Posons

$$N = [Ap - Bq]^2 + [A'p - B'q]^2,$$

ou

$$N = (A^2 + A'^2)p^2 - 2(AB + A'B')pq + (B^2 + B'^2)q^2,$$

A, B, A', B' étant des indéterminées, et cherchons à identifier les deux expressions de N.

L'identité

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$$

conduit à prendre $A = x^2 - z^2$, $A' = 2xz$, $B = y^2 - z^2$, $B' = 2yz$. Mais la condition $AB + A'B' = M$, exigerait que l'on eût entre x, y, z l'une ou l'autre des relations $xy = \pm(x - y)z$.

Prenons donc seulement $A = x^2 - z^2$, $A' = 2xz$ et laissons B et B' indéterminées. Nous devrons avoir

$$B^2 + B'^2 = (y^2 + z^2)^2, \quad (x^2 - z^2)B + 2xzB' = M.$$

En résolvant ce système d'équations, on trouve

$$B = \frac{M(x^2 - z^2) \pm 4x^2z^2yt}{(x^2 + z^2)^2}, \quad B' = \frac{2Mxz \mp 2xyzt\,(x^2 - z^2)}{(x^2 + z^2)^2},$$

où t représente la racine carrée de $x^2 + y^2 + z^2$, laquelle est, par hypothèse, commensurable. Les valeurs de B et B' étant rationnelles, la proposition de M. Catalan est démontrée.

Remarque. Comme x et y entrent symétriquement dans N, on pourrait prendre $B = y^2 - z^2$, $B' = 2yz$, et l'on trouverait pour A, A' des valeurs analogues à celles de B et B', trouvées plus haut, où x serait remplacé par y et vice-versâ. De sorte que, si $x^2 + y^2 + z^2$ est un carré, N peut être décomposé de quatre manières au moins en une somme de deux carrés.

×Question 471.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

Étant donnés deux petits cercles de rayons r, r' tangents entre eux extérieurement et tangents à un même grand cercle, le rayon sphérique x d'un cercle qui touche les trois précédents vérifie la relation

$$\cot x = \sqrt{\cot x \cot r - 1} + \sqrt{\cot x \cot r' - 1}.$$ (Gillet et Deprez.)

Solution par M. Beyens. Soient A, A', B les points où les trois

Digitized by Google

petits cercles touchent le grand cercle. On a (*Mathesis*, t. V, p. 117)

$$\sin\tfrac{1}{2}AA' = \sqrt{\operatorname{tang} r \operatorname{tang} r'}, \quad \sin\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{\operatorname{tang} r \operatorname{tang} x}, \quad \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité

$$\sin\tfrac{1}{2}AA' = \sin\tfrac{1}{2}(AB + BA') = \sin\tfrac{1}{2}AB\cos\tfrac{1}{2}A'B + \sin\tfrac{1}{2}A'B\cos\tfrac{1}{2}AB$$

et remplaçant tang par (1 : cot), on trouve la relation proposée.

Si l'on chasse les radicaux, il vient

$$\cot^2 x + \cot^2 r + \cot^2 r' - 2\cot x \cot r - 2\cot x \cot r' - 2\cot r \cot r' + 4 = 0,$$

formule symétrique en x, r, r', ce que la nature de la question explique suffisamment. (J. N.)

×Question 479.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 239.)

Étant donnés n points quelconques $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ***soient*** A_{n+1} ***leur centre des moyennes distances;*** A_{n+2}, ***celui des points*** $A_2, A_3, \ldots A_n, A_{n+1}$; A_{n+3}, ***celui des points*** $A_3, A_4, \ldots, A_{n+2}$; ***et ainsi de suite. Démontrer que les points*** $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ ***ont pour limite le centre de gravité des points*** $A_1, A_2, \ldots A_n$, ***chargés respectivement des poids*** $1, 2, \ldots, n$. (J. Neuberg.)

Solution par M. Mosnat. Soient (x_p, y_p, z_p) les coordonnées du point A_p. On a, en supposant $p > n$,

$$x_p = \frac{x_{p-n} + x_{p-n-1} + \cdots + x_{p-1}}{n},$$

ce que l'on peut écrire ainsi

$$nx_p + (n-1)x_{p-1} + \cdots + x_{p-n+1} = nx_{p-1} + (n-1)x_{p-2} + \cdots + x_{p-n}.$$

Cette relation montre que le centre de gravité de n points consécutifs quelconques est fixe; donc

$$nx_p + (n-1)x_{p-1} + \cdots + x_{p-n+1} = nx_n + (n-1)x_{n-1} + \cdots + x_1. \quad (1)$$

Lorsque p augmente indéfiniment, les quantités x_p, x_{p+1}, ... tendent vers une limite X. Car si $B_1, B_2, \ldots$ sont les projections de $A_1, A_2, \ldots$ sur l'axe OX, B_{n+1} tombe entre les extrêmes des points $B_1, B_2, \ldots B_n$; B_{n+2}, entre les extrêmes des points $B_2, B_3, \ldots, B_{n+1}$, et ainsi de suite. Comme les extrêmes d'un groupe de n points consécutifs finissent par être éliminés dans la formation des groupes de n points consécutifs, ces groupes

Digitized by Google

tendent à occuper un segment de droite aussi petit qu'on veut. De l'égalité (1), on tire, en remplaçant x_{p-n+1}, x_{p-n+2}, ... x_p par leur limite X :

$$X = \frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

×Question 527.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 216.)

On donne, dans un plan, un angle xCy et un point A. *Par les points* A, C *on fait passer deux circonférences. Soient* E, F *les points où la première coupe les côtés de l'angle. Soient, semblablement,* G, H *les points de la seconde circonférence, situés sur les côtés de l'angle. On construit les parallélogrammes* ECHP, FCGQ. *Cela posé :* 1° *la droite* PQ *est perpendiculaire à celle qui joint les projections de* A *sur les côtés de l'angle xCy;* 2° *cette droite* PQ *passe au point de concours des cordes* EF, GH(*). (E. CATALAN.)

Solution par MM. VERNIORY, GOB, KLOMPERS, DEPREZ *et* LAURENS. Soient x, y les projections de A sur les côtés de l'angle donné. On voit facilement, par les quadrilatères inscriptibles AxCy, AECF, AGCH, que les triangles Axy, AEF, AGH sont équiangles entre eux, de même que les triangles AEG, AFH. La similitude de ces derniers donne

$$\frac{GE}{FH} = \frac{AE}{AF} = \frac{Ax}{Ay};$$

donc, si R est le point d'intersection de GQ avec HP, les triangles Axy, RPQ ont un angle égal compris entre côtés proportionnels (GE = RP, FH = RQ), et comme les côtés des angles xAy, PRQ sont perpendiculaires, les côtés PQ, xy le sont également.

2° La deuxième partie de la question résulte du théorème suivant : *Si trois droites a, b, c sont parallèles ou concourantes, et que trois autres droites a', b', c' sont également parallèles ou concourantes, les droites joignant les points ab' et a'b, bc' et b'c, ca' et c'a concourent en un même point.*

On peut aussi la démontrer directement. Observons d'abord que le point de rencontre K de FQ avec HG, et le point de rencontre I de GQ

(*) E. CATALAN, *Mélanges mathématiques* (2me éd.), n° CCI,

Digitized by Google

avec EF sont sur une droite KI parallèle à EH; car CG : CE = FI : FE = FK : FN, N étant le point d'intersection de FQ avec EH. Les triangles PHE, QKI sont donc homothétiques, et les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un même point.

Remarque (due à M. Laurens). Les droites telles que EF, GH enveloppent une parabole tangente à Cx, Cy, ayant pour foyer A et pour tangente principale xy. Les parallélogrammes qui ont pour diagonales ces droites EF, GH ..., et qui ont l'angle commun xCy, ont leurs quatrièmes sommets sur la corde de contact de l'angle xCy avec la parabole.

×Question 547.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 280.)

Soit a^n la plus faible puissance de a qui, divisée par le nombre premier absolu p donne pour reste 1. Démontrer que si l'on élève tous les termes de la période des restes à la puissance q, la somme de ces puissances est divisible par p, si n n'est pas diviseur de q; elle est égale à un multiple de p augmenté de n, si n est diviseur de q. (Schwartz.)

Solution par M. Hacken, *élève de l'École normale des sciences de Gand et* M. Mosnat. I. Puisque a^n est la plus faible puissance de a, qui divisée par p, donne pour reste 1 (ou, comme on dit, puisque a appartient à l'exposant n), dans les relations

$$a = r_1 + \mathscr{M} p, \quad a^2 = r_2 + \mathscr{M} p, \quad \ldots, \quad a^n = r_n + \mathscr{M} p,$$

les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n = 1$ diffèrent tous entre eux et se reproduisent périodiquement pour les puissances suivantes de a. La relation $a^n = 1 + \mathscr{M} p$ entraîne la suivante : $a^{nq} = 1 + \mathscr{M} p$, ou

$$(a^q - 1)(1 + a^q + a^{2q} + \ldots + a^{(n-1)q}) = \mathscr{M} p.$$

II. On déduit de là

$$1 + a^q + a^{2q} + \ldots + a^{(n-1)q} = \mathscr{M} p,$$

quand n n'est pas diviseur de q; car alors a^q ne donne pas pour reste 1 et le facteur $a^q - 1$ étant premier à p peut être supprimé.

Multiplions la dernière égalité par a^q, nombre premier au diviseur p, il viendra

$$a^q + a^{2q} + a^{3q} + \ldots + a^{nq} = \mathscr{M} p.$$

Digitized by Google

Mais évidemment

$$a^1 = r_1^1 + \mathcal{M}p, \quad a^{2q} = r_2^q + \mathcal{M}p, \quad \ldots,$$
$$a^{nq} = r_n^q + \mathcal{M}p. \qquad (1)$$

Par suite,

$$r_1^q + r_2^q + r_3^q + \cdots + r_n^q = \mathcal{M}p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

III. Quand n est diviseur de q :

$$a^1 = 1 + \mathcal{M}p, \quad a^{2q} = 1 + \mathcal{M}p, \quad \ldots, \quad a^{nq} = 1 + \mathcal{M}p.$$

Donc, à cause des relations (1),

$$r_1^q = 1 + \mathcal{M}p, \quad r_2^q = 1 + \mathcal{M}p, \quad \ldots, \quad r_n^q = 1 + \mathcal{M}p,$$
$$r_1^q + r_2^q + r_3^q \ldots + r_n^q = n + \mathcal{M}p,$$

c'est-à-dire que la somme des restes élevés à la puissance q est un multiple de p augmenté de n.

QUESTIONS D'EXAMEN.

319. Soient AA′, BB′, CC′ trois parallèles quelconques situées dans le même plan, et soient α, β, γ les intersections des côtés homologues des triangles ABC, A′B′C′. Démontrer la relation

$$\frac{AA'(BB' - CC')}{\beta\gamma} = \frac{BB'(CC' - AA')}{\gamma\alpha} = \frac{CC'(AA' - BB')}{\alpha\beta}$$

(SARKAS.)

Considérer le triangle $A\beta\gamma$ coupé par la transversale αBC, remplacer $\frac{AB}{B\gamma}$ par $\frac{AA' - BB'}{BB'}$, etc.

320. On donne deux cercles O, O′. Par un point quelconque A du premier, on mène deux tangentes AB, AC au second cercle. Lieu du milieu M de la corde BC.

Comme $\overline{O'B}^2 = O'M.O'A$, le lieu est une ligne inverse de la circonférence O.

(MANDART.)

321. On donne la base BC d'un triangle ABC et l'angle A. Trouver le lieu du second point d'intersection M de deux circonférences dont l'une

Digitized by Google

passe par C et touche AB en A, et dont l'autre passe par C et touche AC en A.

L'angle BMC = 2A. (MANDART).

322. On donne un triangle ABC. Par un point variable P de BC, on mène PB′ et PC′ parallèles à AC et AB, de manière à former un parallélogramme AB′PC′. Trouver le lieu du second point d'intersection M des circonférences PB′B, PC′C.

L'angle BMC = BB′P + CC′P = 2A. (MANDART.)

323. On donne une circonférence O et une tangente AC à l'extrémité d'un diamètre AOB. D'un point quelconque C de la droite AC, on mène une seconde tangente CT (point de contact T). Trouver le lieu du point de rencontre M de la perpendiculaire abaissée de T sur AB, avec la droite BC.

Si D est le point d'intersection de AC avec la droite BT, C est le milieu de l'hypoténuse AD du triangle rectangle ATD, car CA = CT ; d'où il résulte que M est le milieu de l'ordonnée de T ; donc M décrit une ellipse. (MEURICE.)

QUESTIONS PROPOSÉES(*).

569. Trouver l'enveloppe des circonférences décrites sur les cordes focales d'une conique comme diamètres. (GOB.)

*570. Construire un parallélogramme ABCD, connaissant les distances d'un point intérieur M aux sommets et la somme des angles AMB, CMB. (CL. THIRY.)

*571. Soit $P_n = x^{2k} - x^k + 1$, k étant égal à 2^{n-1}. 1° Les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont premiers entre eux, deux à deux. 2° Dans le produit $P = P_1 P_2 .. P_n$, ordonné suivant les puissances de x, les coefficients sont $+1$, -1 ou zéro. 3° La variable x étant moindre que l'unité, on a, quand n croît indéfiniment : $(1 + x + x^2) \lim P = 1$. (E. CATALAN.)

572. Étant donné un triangle équilatéral ABC, on considère toutes les paraboles qui passent par A, B et dont la directrice passe par C. Démontrer : 1° que le foyer décrit une inverse de conique ; 2° que l'extrémité du diamètre mené par le milieu de AB décrit une circonférence. (JEŘÁBEK.)

(*) *Rectification* : Quest. 567, au lieu de $\frac{1}{r}$, lire $\frac{2}{r}$ (Err. signalée par M. MOSNAT).

Digitized by Google

SUR LA RECTIFICATION DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES.

par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur au Lycée Charlemagne.

Préliminaires. M. G. de Longchamps a publié récemment deux notes sur la rectification de quelques courbes remarquables. Dans la première (C. R., 7 mars 1887, t. CIV, p. 676-678), il a réduit l'expression de l'arc de la trisectrice de Maclaurin à l'intégrale

$$\int \frac{k^2 z^2 dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

et à un terme algébrique. Dans la seconde (C. R., 4 avril 1887, t. CIV, pp. 964-966), développant une idée de M. Neuberg, il a ramené la rectification de toutes les cubiques unicursales circulaires droites à l'intégrale

$$\int \sqrt{4k^2 + 4(1-k)z^2 + z^4}\,\frac{dz}{1+z^2}.$$

Dans ce qui suit, le savant professeur développe et généralise les résultats obtenus dans la note précédente. Quoique le sujet traité soit quelque peu en dehors du programme de *Mathesis*, nous insérons volontiers cet article dans notre recueil à cause de l'élégance et de la simplicité de la méthode de M. de Longchamps.

(P. M.)

1. THÉORÈME. *Toute cubique circulaire, unicursale (droite ou oblique) est rectifiable par des arcs de conique.* Le calcul que nous avons donné dans les C. R., pour les cubiques circulaires, unicursales, droites, s'applique aussi à l'équation

$$\rho = a\cos\omega + \frac{b}{\sin(\omega-\alpha)},$$

laquelle représente, dans un choix convenable d'axes de coordonnées, toutes les cubiques unicursales, circulaires (droites ou obliques). Le calcul est plus long; mais, finalement, il conduit, pour exprimer la longueur s de l'arc de cubique, à la formule

$$s = \int \frac{\sqrt{\varphi(\omega)}}{\sin^2(\omega-\alpha)}\,d\omega,$$

$\varphi(\omega)$ désignant une fonction homogène du quatrième degré en $\cos\omega$ et $\sin\omega$. L'arc s est donc rectifiable au moyen des seules intégrales elliptiques.

2. Mais on peut éviter, pour reconnaître ce fait, le calcul assez pénible auquel nous venons de faire allusion, en considérant les cubiques circulaires, unicursales, comme transformées des coniques par rayons vecteurs réciproques (*).

(*) Cette remarque intéressante nous a été faite par M. Jamet, professeur au Lycée de Nantes.

Digitized by Google

Prenons pour origine un point O d'une conique U et pour axes de coordonnées les cordes principales qui passent par ce point. L'équation de la conique U est alors $Ax^2 + A'y^2 - mx - ny = 0$, ou, en coordonnées polaires (u, ω)

$$u = \frac{m\cos\omega + n\sin\omega}{A\cos^2\omega + A'\sin^2\omega}.$$

En posant $uv = k^2$, la transformée de U, par rayons vecteurs réciproques, est une courbe V, correspondant à l'équation

$$v = k^2\frac{A\cos^2\omega + A'\sin^2\omega}{m\cos\omega + n\sin\omega},$$

ou en revenant aux coordonnées cartésiennes

$$(mx + ny)(x^2 + y^2) = k^2(Ax^2 + A'y^2).$$

C'est bien, dans un système convenable d'axes, l'équation générale des cubiques unicursales, circulaires. Ainsi : *toute cubique circulaire, unicursale, peut être considérée comme transformée par rayons vecteurs réciproques, d'une conique convenablement choisie.*

De cette simple remarque, découle le théorème que nous avons en vue. En effet, considérons deux courbes quelconques U et V, inverses l'une de l'autre ; soient M et M' deux points correspondants et soient ds, ds' les différentielles des arcs en ces points. En représentant par O le pôle de la transformation et en posant $OM = u$, $OM' = v$, on a, par application de principes connus,

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{u}{v}.$$

En observant que $uv = k^2$, cette égalité peut s'écrire

$$ds' = \frac{k^2}{u^2}ds.$$

Supposons, en particulier, que U soit une conique ; alors V, comme nous l'avons montré, est une cubique circulaire, unicursale ; d'ailleurs, comme l'observe, avec raison, M. Jamet, dans la lettre à laquelle nous venons de faire allusion, la conique U étant unicursale, la différentielle ds s'exprime au moyen d'un radical carré, portant sur une expression algébrique du quatrième degré (en général) par rapport à un certain paramètre t. La valeur de u^2 est donnée par une expression rationnelle de ce paramètre t, d'où l'on conclut que s' dépend uniquement des intégrales elliptiques. (*A continuer.*)

Digitized by Google

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA TRANSFORMATION BIRATIONNELLE QUADRATIQUE;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'université de Gand.

1. *Inversion trilinéaire.* Considérons deux coniques S_1 et S_2 rapportées à leur triangle autopolaire commun :

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0, \quad a'\alpha^2 + b'\beta^2 + c'\gamma^2 = 0.$$

Les polaires d'un point quelconque P $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$ par rapport à ces coniques ont pour équations :

$$a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' = 0, \quad a'\alpha\alpha' + b'\beta\beta' + c'\gamma\gamma' = 0.$$

Le point d'intersection P′ de ces deux droites aura ses coordonnées α'', β'', γ'' définies par les relations

$$(1) \qquad \frac{\alpha''}{(bc' - b'c)\,\beta'\gamma'} = \frac{\beta''}{(a'c - ac')\,\gamma'\alpha'} = \frac{\gamma''}{(ab' - a'b)\,\alpha'\beta'}.$$

P′ est donc le point correspondant au point P dans la transformation birationnelle quadratique définie par les équations (1). Ce point est donc le point de concours des polaires du point P par rapport au faisceau de coniques ayant pour base le quadrilatère inscrit dans les coniques S_1 et S_2.

2. *Autre interprétation géométrique.* Soient D, D_1, D_2, D_3 les quatre sommets du quadrilatère; A, B, C, ceux du triangle diagonal. Nous pouvons prendre pour la conique S_1 le couple de droites D_1D_2 et DD_3; alors AP et AP′ divisent harmoniquement l'angle D_1AD; donc AB et AC, AP et AP′ forment une involution dont un rayon double est AD. La construction du point P′ se résume dans le théorème suivant :

Étant donnés un triangle ABC *et un point* D, *si l'on détermine les rayons conjugués des droites* AP, BP, CP, *dans les trois involutions définies par les couples* (AB, AC) *et* (AD, AD), (BC, BA) *et* (BD, BD), (CA, CB) *et* (CD, CD); *ces rayons conjugués passent par un même point* P′, *correspondant du point* P *dans une transformation birationnelle quadratique.*

3. *Transformation de Hirst.* Soit O le point d'intersection des droites BC et AD_1. Menons la droite OP′ rencontrant la droite AP au point P_1. Ce point sera le correspondant du point P′ dans la transformation

Digitized by Google

homologique harmonique, dont le centre est le point O et dont l'axe est la droite AD. Le point P_1 sera donc aussi le correspondant du point P, dans une transformation birationnelle quadratique. Je dis que la correspondance est réversible. Il suffit de faire voir que, si P_2 est le point de rencontre des droites AP′ et OP, les points P_2 et P_1 sont correspondants dans la première transformation; ce qui aura lieu, si BP_2 et BP_1 sont deux rayons conjugués de l'involution (BA, BC) (BD, BD). Or, dans la transformation homologique, aux droites CA, CB, CP, CP′, CD, correspondent les droites BA, BC, BP_2, BP_1, BD; donc les rayons BP_1 et BP_2 sont conjugués dans l'involution en question.

Il résulte de là que les points P et P_1 décrivent sur AP une involution, dans laquelle le conjugué du point A est le point de rencontre des droites BC et AP. Le point A n'est donc jamais un des points doubles et le lieu de ces points doubles est une conique circonscrite au quadrilatère $DD_1D_2D_3$ et ne passant pas par le point A. Cette conique ne peut se réduire à deux droites, à moins que ce ne soient les droites BD, BD_2 ou CD, CD_2. Or, les droites BD, BD_2 divisant harmoniquement l'angle P′BP, ne peuvent diviser harmoniquement l'angle P_1BP. Donc la conique ne peut se réduire à deux droites et la correspondance des points P_1 et P peut être définie géométriquement comme il suit :

Les deux points P et P_1 sont en ligne droite avec un point fixe A et sont conjugués par rapport à une conique ne passant pas par le point fixe. C'est la transformation de Hirst.

Dans le cas où le point A est à l'intérieur de la conique, on peut, par projection ramener la transformation de Hirst à la transformation par rayons vecteurs réciproques.

4. *Réversibilité de la transformation.* Le point P′ est sur toutes les polaires du point P; il en résulte que le point P sera sur toutes les polaires de P′; donc P′ considéré comme appartenant à la première figure, a pour correspondant le point P.

Donc, en général, à un point P correspond un seul point P′, et la transformation est réversible.

Il y a cependant des exceptions. Le point A est le pôle de la droite BC par rapport à toutes les coniques; donc au point A correspond la droite BC. De même, aux points B et C correspondent respectivement les droites AC et AB. Ces points jouissent d'une propriété remarquable : *ils sont communs à toutes les transformées;* car, si une courbe rencontre les côtés du

Digitized by Google

triangle ABC en des points U, V, ..., différents de A, B, C, ces points U, V, ..., ont pour correspondants les points A, B, C.

5. *Transformée d'une droite.* Soient P et Q deux points quelconques de la droite. Les polaires de ces deux points par rapport aux coniques forment deux faisceaux homographiques, dont les sommets sont P′ et Q′. Les points d'intersection des rayons correspondants, ou les pôles de la droite, seront sur une conique passant par P′ et Q′. P et Q étant deux points quelconques de la droite, la conique lieu des pôles de la droite par rapport à un faisceau de coniques circonscrites à un quadrilatère, est la transformée birationnelle quadratique de cette droite.

La transformée sera une droite ou un point si la droite passe par un sommet du triangle ou coïncide avec un de ses côtés.

6. *Transformée d'une courbe d'ordre n.* Soit K une courbe d'ordre n ayant les points A, B, C, comme points multiples d'ordre a, b, c. La transformée K′ sera une courbe d'ordre n' ayant les points A, B, C, comme points multiples d'ordre a', b', c'.

Entre n, a, b, c, n', a', b', c', existent les relations suivantes (*) :

$$n' = 2n - (a + b + c), \qquad n = 2n' - (a' + b' + c');$$
$$a' = n - (b + c), \qquad a = n' - (b' + c');$$
$$b' = n - (a + c), \qquad b = n' - (a' + c');$$
$$c' = n - (a + b), \qquad c = n' - (a' + b').$$

Quant aux autres points multiples de K, ils auront pour correspondants des points multiples de même ordre. L'ordre du contact de deux courbes sera aussi le même que celui de leurs transformées.

7. De la formule

$$n' = 2n - (a + b + c)$$

(*) En effet, la transformée T de la courbe K se composera de a fois BC, b fois AC, c fois AB, et d'une courbe K′. Les droites BC, AC, AB, étant fixes, c'est la courbe K′ qui est la transformée de K. Le nombre de points d'intersection d'une droite avec la figure T est égal à celui des points communs à la courbe K et à la conique transformée de la droite; donc le degré de T est égal à $2n$, et par conséquent, $n' = 2n - (a + b + c)$. Un raisonnement analogue donne l'ordre de multiplicité du point A sur la courbe K′. La droite BC rencontre la courbe K en n points, donc A est un point multiple d'ordre n sur T; mais le point A se trouve b fois sur AC, et c fois sur AB; donc $a' = n - (b + c)$.

La première série de formules étant démontrée, les formules de la seconde série deviennent évidentes, à cause de la réversibilité de la transformation. On peut aussi les déduire algébriquement des premières.

Digitized by Google

résulte qu'en choisissant convenablement les points A, B, C, on peut faire

$$n' > n;$$

la transformation étudiée permet donc de déduire d'une courbe donnée une infinité d'autres de degré aussi élevé qu'on le veut.

Les formules du numéro précédent montrent l'importance du choix des points A, B, C. Prenons par exemple, une conique à transformer.

1° $a = b = c = 0$. La transformée est une quartique ayant trois points doubles. 2° $a = 1$, $b = c = 0$; la transformée est une cubique avec un point double. 3° $a = b = 1$, $c = 0$; la transformée est une conique. 4° $a = b = c = 1$; la transformée est une droite.

8. ***Condition pour qu'une courbe d'ordre n puisse se déduire d'une courbe de degré inférieur.*** Il faut que $a + b + c > n$.

Nous pouvons toujours prendre pour A, B, C, les points multiples d'ordre le plus élevé. 1° Soit $n = 3p$, on devra avoir au moins $a = p + 1$, $b = p$, $c = p$. 2° $n = 3p + 1$; alors, il faut que $a = p + 1$, $b = p + 1$, $c = p$. 3° $n = 3p + 2$; dans ce cas, on doit supposer $a = b = c = p + 1$.

L'ordre du point multiple d'ordre le plus élevé de la courbe doit donc être au moins égal au tiers du multiple de trois immédiatement supérieur à n.

9. ***Conservation du genre*** **(*).** Toutes les transformées d'une courbe sont de même genre que cette courbe. Cela résulte de ce qui a été dit (n° 5) sur l'ordre de multiplicité des points A, B, C pour les deux courbes.

10. ***Conservation du rapport anharmonique.*** Soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points en ligne droite; leurs correspondants P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 sont sur une même conique, lieu des pôles de cette droite. Si l'on construit les polaires de ces quatre points par rapport à l'une des coniques du système, ces quatre polaires passeront respectivement par les points P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, et formeront un faisceau dont le centre est sur la conique, et dont le rapport anharmonique est égal à $(P_1P_2P_3P_4)$. Mais le rapport anharmonique du faisceau est aussi égal à celui des quatre points de la conique $P'_1P'_2P'_3P'_4$, que nous représenteront par $(P'_1P'_2P'_3P'_4)_c$; donc

$$(P_1P_2P_3P_4) = (P'_1P'_2P'_3P'_4)_c.$$

(*) Le *genre* d'une courbe d'ordre n ayant des points multiples d'ordre a, b, c, etc., est $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}a(a-1) - \frac{1}{2}b(b-1) - \frac{1}{2}c(c-1) -$ etc.

Digitized by Google

11. ***Transformation des relations métriques.*** Nous donnerons deux exemples :

I. Considérons un faisceau de quatre droites $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ partant d'un point D. Coupons ce faisceau par une sécante, soient P_1, P_2, P_3, P_4 les quatre points d'intersection. On a

$$(P_1P_2P_3P_4) = D(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Faisons une transformation de la figure; le faisceau donne lieu à quatre coniques circonscrites au quadrilatère ABCD'; la transformée de la sécante est une conique passant par ABC; elle rencontre les coniques respectivement aux points P'_1, P'_2, P'_3, P'_4. D'après le n° 10, on a

$$(P'_1P'_2P'_3P'_4)_c = (P_1P_2P_3P_4) = D(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4),$$

donc

$$(P'_1P'_2P'_3P'_4)_c = C^{te}.$$

Si quatre coniques sont circonscrites à un quadrilatère ABCD', ***toute conique passant par*** A, B, C ***les coupe en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.***

On voit facilement qu'on peut remplacer la conique par une droite passant par un des sommets du quadrilatère.

II. Théorème de Desargues. Un système de coniques passant par quatre points détermine sur une droite quelconque un système de points en involution.

Par la transformation, nous pourrons en déduire quatre théorèmes, car nous avons vu (n°7) qu'une conique se transforme de quatre manières.

Théorème I. Un système de droites passant par un même point détermine sur une conique un système de points en involution (*).

On prend trois points communs aux coniques pour sommets du triangle ABC. Les coniques se transforment en un faisceau de droites et la sécante en une conique.

Théorème II. Si l'on a un système de coniques passant par quatre points, toute conique passant par deux de ces points coupe les coniques suivant un système de points en involution. On prend deux points communs aux coniques pour les points A et B.

Théorème III. Si l'on a un système de cubiques ayant en commun un point double et cinq autres points, toute conique passant par le point

(*) Voir Cremona, *Géométrie projective*, n° 160.

Digitized by Google

double et deux autres points communs coupe les cubiques suivant un système de points en involution. On prend un seul point commun aux coniques pour sommet du triangle ABC.

Théorème IV. Si l'on a un système de quartiques ayant en commun trois points doubles et quatre autres points, toute conique passant par les trois points doubles, coupe les quartiques suivant un système de points en involution.

Aucun point commun n'est pris pour sommet du triangle ABC.

12. ***Transformation des propriétés descriptives des figures.*** La transformation de ces propriétés est facile lorsqu'on tient compte de ce qui a été dit sur la transformée d'une courbe. A des points situés en ligne droite correspondent des points situés sur conique circonscrite au triangle ABC; à un faisceau de droites correspond un faisceau de coniques circonscrites au quadrilatère ABCD', etc.

---

*SPHÈRE DE S. ROBERTS.

L'extension des propriétés du triangle au tétraèdre est loin d'être complète; il reste encore à trouver plus d'une analogie entre ces deux figures. Certaines généralisations ne semblent s'appliquer qu'à des tétraèdres particuliers. Par exemple, c'est dans le tétraèdre orthogonal qu'on rencontre un point de concours des hauteurs, et une sphère passant par les milieux des arêtes et les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées; le tétraèdre isodynamique (ou harmonique) jouit de propriétés rappelant celles du point de Lemoine et des cercles de Tucker.

La difficulté réside souvent dans l'énoncé du théorème de géométrie plane. Nous citons, à ce sujet, une proposition signalée en 1880 par M. S. Roberts : ***Si l'on choisit arbitrairement un point sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères passant par un sommet et les points marqués sur les trois arêtes adjacentes ont un point commun*** (voir ***Mathesis,*** t. IV, p. 16); les réciproques et les conséquences de cette proposition sont des plus curieuses.

M. S. Roberts vient de faire connaître dans l'***Educational Times*** (mai 1887, question 9093) un nouveau théorème dont l'importance est incontestable; en voici l'énoncé :

On décrit les quatre sphères O_a, O_b, O_c, O_d ***qui passent par les sommets***

Digitized by Google

d'une face d'un tétraèdre ABCD *et ont leur centre dans le plan de cette face. Le centre* O′ *de la sphère qui les coupe orthogonalement, et le centre* O *de la sphère* ABCD *sont des points inverses par rapport au tétraèdre; les centres des premières sphères* (et les projections de O′ sur les faces) *sont sur une même sphère* O″ *qui a son centre au milieu de la distance* OO′; *les trois sphères* O, O′, O″ *ont même plan radical.*

Cette proposition présente une analogie avec celle du cercle des neuf points; mais, ce qui est très remarquable, elle s'applique à un tétraèdre quelconque. Nous en proposons la démonstration à nos lecteurs et nous les engageons à poursuivre la voie ouverte par M. Roberts.

Nous signalons, par exemple, la propriété suivante qui rappelle celle de l'orthocentre d'un triangle : O′ *est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre qui a pour sommets les projections de* O′ *sur les faces de* ABCD.

(J. N.)

QUESTIONS DE LICENCE;

par M. H. Brocard.

(Suite; voir *Mathesis*, t. VI, p. 250.)

XXXV. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z^2}{y^2}+1\right)p-\left(\frac{x}{y}+\frac{z^2}{x^2}+1\right)q=z\left(\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}\right).$$

x *et* y *sont les variables indépendantes,* z *la fonction inconnue, et* p *et* q *représentent les dérivées de* z *par rapport à* x *et* y.

(Clermont, novembre 1884.)

On a d'abord à intégrer les équations auxiliaires :

$$\frac{dx}{\frac{y}{x}+\frac{z^2}{y^2}+1}=\frac{-dy}{\frac{x}{y}+\frac{z^2}{x^2}+1}=\frac{dz}{z\left(\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}\right)}.$$

Soient, pour abréger, M, N, P, les trois dénominateurs. On reconnaît aisément que $Mx-Ny+Pz=0$. Donc $xdx+ydy+zdz=0$, $x^2+y^2+z^2=C$.

Ensuite,

$$\frac{dx}{M}=\frac{dy}{-N}=\frac{y^2dx+x^2dy}{My^2-Nx^2}=\frac{dz}{P}.$$

Digitized by Google

La dernière relation équivaut à

$$\frac{xydz}{z(y^3-x^3)}=\frac{y^2dx+x^2dy}{y^4-x^4+xy^3-yx^3},$$

ou, toutes réductions faites, à

$$\frac{dz}{z}=\frac{-d\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$

L'intégrale est

$$\frac{z(x+y)}{xy}=C'.$$

L'intégrale de l'équation aux dérivées partielles est donc

$$z(x+y)=xy\,\varphi(x^2+y^2+z^2).$$

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

par C. Bergmans, professeur à l'Athénée royal de Gand.

(Suite; voir *Mathesis*, t. V, p. 71, 95, 175; t. VI, p. 169.)

Quatrième série.

LIV. L'abscisse à l'origine d'une corde est moyenne proportionnelle entre les abscisses des extrémités de la corde; l'ordonnée à l'origine d'une corde est la moitié de la moyenne harmonique entre les ordonnées des extrémités.

LV. 1° Les droites qui joignent un point quelconque M de la parabole à deux points P et P′ de l'axe équidistants du sommet de la courbe, rencontrent celle-ci en deux points Q et Q′ symétriques par rapport à l'axe et les deux segments PM, PQ sont entre eux comme P′M et P′Q′; 2° le quart du paramètre ou $\frac{1}{4}p$, est une moyenne proportionnelle entre les abscisses des extrémités de toute corde menée par le foyer ou par le pied de la directrice.

LVI. Si, par un point D sur l'axe de la parabole, on mène une sécante quelconque BDB′ et l'ordonnée DM; si, du sommet O de la courbe, on mène

Digitized by Google

ensuite des cordes aux extrémités B et B′ de la sécante et M de l'ordonnée : 1° La tangente de l'angle MOX que MO fait avec l'axe OX est la moyenne proportionnelle entre les tangentes des angles que les droites OB et OB′ font avec l'axe ; 2° en particulier, si l'angle BOB′ est droit, la corde BB′ coupe l'axe en un point fixe dont l'abscisse est $2p$.

Les th. LV et LVI sont des corollaires du th. LIV.

LVII. Les deux segments d'une corde focale sont entre eux comme les distances du pied I de la directrice à la courbe estimées suivant la sécante IB menée à l'une des extrémités B de la corde focale.

LVIII. En un point A d'une parabole on mène une corde normale AB, puis sur cette corde AB comme diamètre on décrit une circonférence coupant la parabole en un point B′ : 1° la corde AB′ est l'antiparallèle de la normale AB ; 2° le symétrique A′ de A (par rapport à l'axe) est le sommet du diamètre qui passe par le milieu de la corde BB′.

Voir th. XXVI, 2e série, t. V, p. 175.

LIX. Si r et r' sont les rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités A et B d'une corde ADB normale en A, on a la relation $\left(r+\frac{p}{2}\right)^2=\left(r-\frac{p}{2}\right)\left(r'-\frac{p}{2}\right)$ (th. LIV).

LX. Soit une corde focale quelconque BFB′ : 1° Si aux extrémités B et B′ on mène des normales, elles se coupent en un point E′ sur le diamètre conjugué de BB′ ; 2° la circonférence décrite sur la corde focale comme diamètre passe par les points d'intersection E des tangentes et E′ des normales menées par les extrémités B et B′.

LXI. Le lieu géométrique de l'intersection E′ des normales menées par les extrémités B et B′ des sécantes qui passent par un point fixe A est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à la polaire du point A. Le lieu devient une droite quand les sécantes sont parallèles entre elles ; cette droite rencontre l'axe au même point que la normale menée par l'extrémité de la sécante parallèle menée par le sommet de la parabole.

LXII. Si par les sommets A′, A″, A‴ d'un triangle, pris deux à deux, on fait passer trois paraboles ayant un point de contact commun T, les diamètres de ces paraboles menés par le point T rencontrent les côtés

Digitized by Google

correspondants du triangle en des points tels que les droites qui les joignent avec les sommets opposés passent par ce même point.

Cette question donne lieu à une discussion fort intéressante : par deux sommets du triangle, il passe deux paraboles et il faut convenablement associer les six paraboles de la question.

Juillet 1886.

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES.

Nous réunissons ici des communications intéressantes, dues à plusieurs de nos jeunes correspondants.

1. *On prend sur les côtés* OX, OY *d'un angle donné les segments* OM, ON *dont le produit est constant. Trouver l'enveloppe du cercle* OMN.

Si l'on prend pour centre d'inversion le point O, l'inverse du cercle OMN sera une droite enveloppant une hyperbole ayant pour centre O; donc l'enveloppe du cercle OMN sera une inverse du centre de cette hyperbole ou une podaire du centre d'une autre hyperbole, c'est-à-dire une lemniscate. (FARISANO.)

2. Étant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, on décrit deux ceroles variables, tangents l'un à l'autre et passant, l'un par A et B, et l'autre par C et D. Trouver le lieu du point de rencontre M du premier cercle, avec la tangente AE menée par A au second cercle.

Prenons pour pôle d'inversion A, pour puissance le produit AC.AD, et soient B' l'inverse de B, B'NM' la tangente menée de B' au cercle ECD, N son point de contact et M' son point d'intersection avec la droite AE. Comme AE et B'N ont des longueurs constantes, M' décrit une conique ayant pour foyers A et B', donc M décrit un limaçon de Pascal. (MANDART.)

3. Par deux points fixes A, B on fait passer une circonférence quelconque I, rencontrant la perpendiculaire élevée au milieu O de AB en P et Q. Les tangentes menées en A, B se rencontrent en un point R. Trouver le lieu des points de rencontre M, M' de la circonférence APB avec celle qui a pour diamètre OR.

Prenons pour pôle d'inversion O, pour puissance $-\overline{OA}^2$. Les inverses des points M, M' seront les points de rencontre N, N' du cercle APB avec le diamètre parallèle à AB. La relation $\overline{NI}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OI}^2$ ou $\overline{NI}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{OA}^2$ montre que N et N' décrivent nne hyperbole équilatère dont A et B sont les sommets; donc M et M' sont sur une lemniscate. (MANDART.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 358.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 159.)

Chercher le lieu des sommets des coniques semblables à une conique donnée et doublement tangentes à une circonférence donnée O ***en deux points*** A ***et*** B ***tels que la corde*** AB ***pivote autour d'un point fixe*** P. ***Examiner le cas où la conique donnée est une hyperbole équilatère ou une parabole.***

(BARBARIN.)

Solution par M. BROCARD(*). Prenons pour axes de coordonnées la droite OP et le diamètre perpendiculaire à OP. La corde AB du double contact est parallèle à un axe de la conique. Le centre C de celle-ci est donc sur la droite joignant O au milieu L de AB. Désignons par D, D' les sommets de l'axe parallèle à AB, par E, E' ceux de l'axe dirigé suivant OL. L'équation de la conique rapportée à ses axes de symétrie DD', EE' est, par exemple,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2,$$

k étant un paramètre variable. Si l'on fait

$$OA=R,\quad OP=d,\quad \text{angle } COP=\omega,\quad OC=\alpha,$$

les coordonnées de A seront

$$x'=LA=\sqrt{R^2-d^2\cos^2\omega},\quad y'=CL=d\sin\omega-\alpha.$$

La normale AO a pour équation

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x');$$

comme elle a pour ordonnée à l'origine $CO=-\alpha$, on a

$$\alpha=-\left(y'-\frac{a^2y'}{b^2}\right)=(\alpha-d\sin\omega)\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right). \qquad (1)$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure d'après les indications suivantes : P est pris sur le diamètre horizontal du cercle O, à l'extérieur et à droite; la sécante PAB est tracée au-dessus de OP.

Digitized by Google

Cette égalité représente, en coordonnées polaires (α, ω) le lieu du centre C de la conique variable, lieu qui est une circonférence. On parvient au même résultat en observant que le point L décrit la circonférence ayant pour diamètre OP et que le rapport OC : CL est invariable. On voit aussi que l'axe DD′ de la conique pivote autour d'un point fixe de la droite OP.

La condition que le point A appartient à l'ellipse s'exprime par

$$\frac{\beta^2 - d^2\cos^2\omega}{a^2} + \frac{(d\sin\omega - \alpha)^2}{b^2} = k^2. \qquad (2)$$

Si ρ désigne le rayon recteur OE ou OE′, on a

$$\rho = \alpha \pm kb. \qquad (3)$$

Éliminant α et k entre (1), (2) et (3), on obtient l'équation du lieu des points E, E′, savoir :

$$\rho = \frac{c^2 d\sin\omega}{a^2} \pm \frac{b}{a^2}\sqrt{(R^2 - d^2\cos^2\omega)\,a^2 + b^2d^2\sin^2\omega},$$

ou

$$\rho = \frac{c^2 d\sin\omega}{a^2} \pm \frac{b}{a^2}\sqrt{(R^2a^2 + b^2d^2)\sin^2\omega + a^2(R^2 - d^2)\cos^2\omega}, \quad (4)$$

pourvu qu'on pose $c^2 = a^2 - b^2$. Il est facile de voir que c'est l'équation d'une podaire de conique. En effet, une tangente à la conique représentée par

$$m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2, \qquad (5)$$

a pour équation

$$x\cos\omega + y\sin\omega = \pm\sqrt{m^2\cos^2\omega + n^2\sin^2\omega};$$

par conséquent la distance δ du point (X, Y) à cette droite est

$$\delta = X\cos\omega + Y\sin\omega \mp \sqrt{m^2\cos^2\omega + n^2\sin^2\omega}, \qquad (6)$$

et l'égalité (6), de la même forme que (4), représente aussi, en coordonnées polaires (δ, ω), le point (X, Y) étant l'origine des coordonnées et l'axe polaire étant parallèle à l'axe des abscisses, la podaire du point (X, Y) par rapport à la conique (5).

Concluons aussi que les tangentes aux sommets E, E′ de la conique DED′E′ enveloppent une conique.

Nous avons vu que l'axe DD′ passe par un point fixe Q de la droite OQ. Prenons pour origine ce point Q et pour axe polaire une perpendiculaire

Digitized by Google

à OP; la coordonnée angulaire des points D, D' sera encore ω, et leur rayon recteur ρ aura pour valeur

$$\rho = QC \pm ka = \alpha \operatorname{tg} \omega \pm ka. \qquad (7)$$

L'équation du lieu des points D, D' résulte de l'élimination de α et k entre les égalités (1), (2) et (7).

Remarques. I. Lorsque $b^2 = -a^2$, c'est-à-dire lorsque la conique variable est une hyperbole équilatère, le lieu des points E, E' est un limaçon de Pascal; c'est ce que l'on déduit aisément de l'équation (4).

II. Lorsque la conique variable doit être une parabole, et que H est le point de concours des tangentes menées par A et B (ce point est situé sur la droite OL et sur la polaire de P par rapport au cercle), le sommet de la courbe est au milieu M de la droite LH. La distance de O à la polaire de P étant égale à $R^2 : d$, on a $OH = R^2 : d \cos \omega$; d'où l'on déduit l'équation du lieu du point M, savoir :

$$\rho = \frac{OL + OH}{2} = \frac{1}{2}\left(d \cos \omega + \frac{R^2}{d \cos \omega}\right).$$

Ce lieu est une podaire de parabole, c'est-à-dire une strophoïde

M. Deprez à résolu la même question.

Question 392.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 247.)

On donne le sommet A *et un point* B *d'une hyperbole équilatère. Démontrer que le second sommet, le centre, les deux foyers, le point de concours des tangentes ou des normales en* A *et* B *décrivent des cubiques.* (J. Neuberg.)

Solution analytique, par MM. Gob *et* Deprez. Prenons pour axes AB et la perpendiculaire par A. L'hyperbole équilatère peut être représentée par

$$y^2 - x^2 + Bxy + Dy + ax = 0, \qquad (1)$$

a désignant la distance AB. Le centre satisfait aux équations

$$2y + Bx + D = 0, \quad -2x + By + a = 0,$$

d'où l'on conclut l'équation du diamètre passant par l'origine :

$$y(2a - BD) + x(aB + 2D) = 0.$$

Cette droite étant perpendiculaire à la tangente menée par A, dont

Digitized by Google

l'équation est $Dy + ax = 0$, on trouve la condition nécessaire pour que A soit un sommet :

$$a^2B + 4aD - BD^2 = 0. \qquad (2)$$

L'équation de l'axe est, évidemment,

$$Dx - ay = 0. \qquad (3)$$

Pour avoir l'équation du lieu des seconds sommets, on peut éliminer B et D entre les égalités (1), (2) et (3); on trouve

$$x(x^2 + y^2) - a(y^2 - x^2) = 0.$$

Ce lieu est donc une strophoïde ayant pour point double l'origine et pour asymptote la perpendiculaire élevée en B sur AB.

Le centre O et les foyers F, F′ décrivent des courbes homothétiques au lieu du second sommet, et, par suite, des strophoïdes.

La polaire du point (x, y) par rapport à la conique (1) a pour équation

$$(2y + Bx + D)Y + (-2x + By + a)X + Dy + ax = 0;$$

pour qu'elle coïncide avec la droite AB, on doit avoir

$$-2x + By + a = 0, \quad Dy + ax = 0. \qquad (4)$$

On aura donc le lieu du point de concours des tangentes menées par A et B, en éliminant B et D entre les relations (2) et (4); on trouve

$$x(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}a(x^2 - y^2) = 0,$$

c'est-à-dire une strophoïde homothétique aux précédentes.

La normale en B a pour équation

$$y = -\frac{Ba + D}{a}(x - a);$$

la normale en A est représentée par (3). D'où l'on conclut l'équation du lieu décrit par l'intersection de ces droites :

$$x(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}a(3x^2 + y^2) = 0.$$

Autre solution, par M. Verniory. Soit A′ le second sommet. Les cordes supplémentaires BA, BA′ font avec l'axe AA′ des angles BAA′, BA′A dont la différence égale un droit; par conséquent, les droites AA′ et BA′ tournent autour de A et B avec des vitesses angulaires doubles l'une de l'autre, et leur intersection décrit une strophoïde.

Digitized by Google

Le centre O et les foyers F, F′ partageant AA′ dans un rapport constant, décrivent également des strophoïdes.

Si M est le milieu de AB, le pôle T de la corde AB se trouve sur la droite OM parallèle à A′B; donc les droites AT, B′T ont également des vitesses angulaires doubles l'une de l'autre.

Soit W le point d'intersection de la normale en B avec l'axe AA′. Les faisceaux des droites AW, BW sont, respectivement, projectifs avec ceux des droites AT, BT; l'intersection des rayons homologues des derniers faisceaux engendrant une cubique, le point N décrit une courbe du même ordre.

Nous avons également reçu une bonne solution, moitié géométrique, moitié analytique, de M. Farisano, et une autre de M. Mosnat.

M. Deprez nous a adressé une seconde solution, d'un caractère mixte; nous allons en indiquer le principe. Si (x, y) sont les coordonnées de A′ par rapport aux axes AB, AY, et (X, Y) celles de B par rapport aux axes de symétrie de l'hyperbole; si, de plus, $AA' = 2a$ et $AB = p$, deux triangles semblables donnent immédiatement $y : Y = x : X - a = 2a : p$; on a aussi $X^2 - Y^2 = a^2$, $y^2 + x^2 = 4a^2$. Il suffit d'éliminer X, Y, a entre ces équations pour avoir le lieu de A′.

×Question 536.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 216.)

Soient G *et* K *le centre de gravité et le point de Lemoine du triangle* ABC. *Les droites* AG *et* BK *se coupent en un point* D; *la parallèle à* BC *par* A *et la tangente menée en* B *au cercle* ABC *se rencontrent en un point* E. *Démontrer que les points* D, E *sont en ligne droite avec le sommet* C *et avec un point de Brocard de* ABC. (Verniory.)

Solution par M. Mineur. Les droites AD, BD, CD rencontrent les côtés BC, CA, AB en des points A′, B′, C′ tels que

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

Si BKB′ est la symédiane, on a $CB' : B'A = a^2 : c^2$; donc

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{c^2}{a^2}, \qquad (1)$$

ce qui prouve déjà que la droite CD passe par un point de Brocard.

Digitized by Google

Les triangles semblables BAE, CBA donnent

$$\frac{EA}{AB}=\frac{AB}{BC}, \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon A}{BC}=\frac{c^2}{a^2}. \tag{2}$$

Des égalités (1) et (2) on conclut aisément que la droite CE passe par C'.

Solution par MM. Beyens (Cadix) *et* Deprez. Les faisceaux harmoniques A (BCGE) et B (ACKE) ayant un rayon commun, les trois autres couples de rayons se coupent sur une même droite CDE.

Désignons l'angle BCE par V, nous aurons dans le triangle ACE,

$$\frac{\sin(C-V)}{\sin V}=\frac{AE}{AC}.$$

Remplaçons AE par la valeur $c^2 : a$, qu'on déduit des triangles semblables BAE, CBA, et développons sin (C — V); il vient

$$\sin C \cot V - \cos C = \frac{c^2}{ab} = \frac{\sin C \sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \sin C (\cot A + \cot B)$$

ou

$$\cot V = \cot A + \cot B + \cot C.$$

×Question 538.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 240.)

Si A, B, C, a, b, c ***sont des nombres entiers tels que*** $B^2 - AC = -m^2$, ***la quantité***

$$(Ca - Ac)^2 - 4(Bc - Cb)(Ab - Ba)$$

est une somme de deux carrés (*). (E. Catalan.)

Solution par M. Deprez. Multiplions l'expression proposée par A^2, puis remplaçons AC par $B^2 + m^2$; nous aurons

$$(B^2a + am^2 - A^2c)^2 - 4(ABc - B^2b - m^2b)(A^2b - ABa).$$

Si l'on ordonne par rapport à c et que l'on *complète* le carré commençant par les termes en c^2 et c, on trouve

$$[A^2c - 2ABb + (B^2 - m^2)a]^2 + 4m^2(Ba - Ab)^2.$$

(*) Catalan, *Mélanges mathématiques* (2e édition), n° CXXXV.

Digitized by Google

×Question 550.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 280.)

Résoudre un triangle rectangle, connaissant la somme p des deux côtés de l'angle droit et la somme m des deux droites qui, menées par le sommet de l'angle droit partagent l'hypoténuse en trois parties égales.

Solution par MM. Deprez *et* G. Russo. Soient D, E les points qui divisent l'hypoténuse BC du triangle rectangle ABC en trois parties égales BD, DE, EC, et soient a, b, c les côtés du triangle.

Si l'on projette D en D′ sur AB, on a $DD' = \frac{1}{3}b$, $AD' = \frac{2}{3}c$, d'où

$$\overline{AD}^2 = \tfrac{1}{9}(4c^2 + b^2), \quad \overline{AE}^2 = \tfrac{1}{9}(c^2 + 4b^2).$$

Les équations du problème sont donc

$$\sqrt{4c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + 4b^2} = 3m = \sqrt{a^2 + 3c^2} + \sqrt{a^2 + 3b^2}.$$
$$b + c = p, \quad b^2 + c^2 = a^2.$$

La première donne successivement

$$9m^2 = 2a^2 + 3(b^2 + c^2) + 2\sqrt{a^4 + 3a^2(b^2 + c^2) + 9b^2c^2}$$
$$= 5a^2 + 2\sqrt{a^4 + 3a^4 + 9\left(\frac{p^2 - a^2}{2}\right)^2},$$
$$a^2 = \frac{(p^2 + 3m^2)(p^2 - 3m^2)}{2(p^2 - 5m^2)}.$$

On connaît ainsi a et $b + c$.

Généralisation, par M. Deprez. Supposons l'angle A donné, mais quelconque. On a, par le théorème de Stewart,

$$\overline{AB}^2 \cdot CD + \overline{AC}^2 \cdot BD = \overline{AD}^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC,$$

d'où l'on tire AD. On obtient ensuite facilement les équations suivantes :

$$\sqrt{6c^2 + 3b^2 - 2a^2} + \sqrt{6b^2 + 3c^2 - 2a^2} = 3m, \quad b + c = p,$$
$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a^2.$$

De la première, on tire successivement

$$9(b^2 + c^2) - 4a^2 + 2\sqrt{4a^4 - 18a^2(b^2 + c^2) + 18(b^2 + c^2)^2 + 9b^2c^2} = 9m^2,$$
$$(b^2 + c^2)^2 + 9m^4 - 18m^2(b^2 + c^2) + 8a^2m^2 - 4b^2c^2 = 0;$$

des deux autres, on déduit

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2 + p^2\cos A}{1 + \cos A}, \quad 2bc = \frac{p^2 - a^2}{1 + \cos A}.$$

Digitized by Google

Éliminons b et c; il vient

$$a^2 = \frac{9m^4 \cos^2\frac{A}{2} + 9m^2p^2 \cos A - p^4 \sin^2\frac{A}{2}}{m^2\left(9 - 8\cos^2\frac{A}{2}\right) - p^2}.$$

×Question 560.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 56.)

Résoudre, en nombre entiers, l'équation

$$x^2 + y^3 = (x - y)^3. \qquad \text{(DE ROCQUIGNY.)}$$

Solution par MM. A. STEVART (Liége), CHOISIS (Lierre), KLOMPERS (Gand), G. RUSSO (Catanzaro), EMMERICH (Mülheim), BROCARD (Montpellier), FAUQUEMBERGUE (Mont-de-Marsan). L'équation proposée peut prendre la forme

$$(x + y)^3 = (x - y)^2\,[2(x - y) - 1],$$

ce qui conduit à poser

$$2(x - y) - 1 = (2n + 1)^2, \quad x + y = \frac{[(2n+1)^2+1](2n+1)}{2},$$

d'où

$$x = (2n^2 + 2n + 1)(n + 1), \quad y = (2n^2 + 2n + 1)\,n.$$

REMARQUES (dues à M. BROCARD). I. Les nombres y pris négativement résolvent l'équation $x^2 + y^3 = (x + y)^3$.

II. L'équation

$$x^2 - y^3 = (x + y)^3,$$

conduit à poser $x + y = u$, $x - y = u^2$, d'où

$$x = \frac{u(u + 1)}{2}, \quad y = \frac{u(u - 1)}{2}.$$

Donc, la différence des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est un cube. Comparez : ***Proceedings of R. S. Edinburgh,*** 1869-70 (TAIT), et N. C. M., t. II, 1876, pp. 319 et 367 (CATALAN).

Généralisation par M. RUSSO. L'équation

$$x^n + y^n = (x - y)^{n+1}$$

Digitized by Google

admet la solution

$$x = (p+1)\,a, \quad y = pa,$$

pourvu que

$$a = (p+1)^n + p^n.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

224. Soient μ_a, μ_b, μ_c les angles (comptés dans un même sens) sous lesquels les médianes m_a, m_b, m_c coupent respectivement les côtés a, b, c d'un triangle ABC, et soient ν_a, ν_b, ν_c les angles sous lesquels on voit, du centre de gravité G, les côtés; démontrer les relations

$$\mathrm{S}\cotg\mu_a = 0, \quad \mathrm{S}a^2\cotg\mu_a = 0, \quad \mathrm{S}m_a^2\cotg\mu_a = 0,$$
$$\cotg\nu_a = \tfrac{1}{3}(\cotg\mathrm{A} - 2\cotg\mathrm{B} - 2\cotg\mathrm{C}),$$
$$\cotg\mathrm{A} = \tfrac{1}{3}(\cotg\nu_a - 2\cotg\nu_b - 2\cotg\nu_c).$$

Soient M_a, M_b, M_c les milieux des côtés de ABC; H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs. Les trois premières relations se vérifient aisément au moyen des formules

$$\cotg\mu_a = \frac{\mathrm{M_aH_a}}{\mathrm{AH_a}} = \frac{\mathrm{M_aH_a}.\mathrm{BC}}{\mathrm{AH_a}.\mathrm{BC}} = \frac{c^2 - b^2}{4\mathrm{S}}, \ldots.$$

On a aussi $a = \mathrm{BH_a} + \mathrm{H_aC} = \mathrm{AH_a}(\cotg\mathrm{B} + \cotg\mathrm{C})$. Cette formule, appliquée aux triangles $\mathrm{ABM_a}$, $\mathrm{ACM_a}$, donne $\frac{1}{2}\mathrm{BC} = h(\cotg\mathrm{B} + \cotg\mu_a) = h(\cotg\mathrm{C} - \cotg\mu_a)$, d'où $\cotg\mu_a = \frac{1}{4}(\cotg\mathrm{C} - \cotg\mathrm{B})$, et par suite $\mathrm{S}\cotg\mu_a = 0$.

Dans les triangles ABG, $\mathrm{M_aBG}$: $\mathrm{AG} = k\,(\cotg\mathrm{GAB} + \cotg\nu_c) = 2\,\mathrm{GM_a} = 2k(\cotg\mu_a - \cotg\nu_c)$, k étant la hauteur abaissée de B sur AG. De là : $3\cotg\nu_c = 2\cotg\mu_a - \cotg\mathrm{GAB}$. Or $2\cotg\mu_a = \cotg\mathrm{C} - \cotg\mathrm{B}$, et $2\cotg\mathrm{BM_cM_a} = 2\cotg\mathrm{A} = \cotg\mathrm{BAG} - \cotg\mathrm{B}$, d'où la quatrième formule.

Prolongeons $\mathrm{GM_a}$ de $\mathrm{M_a}g = \mathrm{GM_a}$. Les côtés du triangle $\mathrm{CG}g$ sont proportionnels et parallèles aux médianes de ABC, et ses médianes sont proportionnelles et parallèles aux côtés de ABC. Cette réciprocité montre que la troisième et la cinquième formules ne diffèrent pas essentiellement de la deuxième et de la quatrième.

Comparez : *Journal de Bourget*, 1885, p. 286 (Math. élém.) et *Journal de Vuibert*, 1886, p. 149. (J. N.)

225. Soit une progression arithmétique, composée de n termes; la raison est donnée. Si de n fois la somme des carrés des termes, on retranche le carré de la somme des termes, le reste est indépendant du premier terme. (E. CATALAN.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**573.** Trouver les rapports des inconnues dans les équations

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)}=\frac{cx+az}{y(ax-by+cz)}=\frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}.$$

(E. LEMOINE.)

×**574.** Lorsque n est impair,

$$C_{2n,n}+10C_{2n-2,n-1}=\mathcal{M}.\ (n+2).$$ (E. CATALAN.)

575. On donne deux cercles qui se coupent au point O ; on mène par ce point une transversale qui coupe l'un des cercles en M, l'autre en M'. Soit P le conjugué harmonique de O par rapport à M et à M'. Démontrer que, quand la transversale tourne autour de O, le point P décrit une strophoïde dont le point double est en O. Déterminer le cercle osculateur en O. (E. DEWULF.)

LES COORDONNÉES CYCLIQUES;

par M. MAURICE D'OCAGNE, ingénieur des ponts et chaussées.

I. Définitions; normale à une courbe.

1. Supposons que tous les points P d'un plan soient pris comme centres de *cycles* C de même rayon μ, c'est-à-dire de cercles décrits dans un sens déterminé, par exemple dans le sens direct (inverse de celui du mouvement des aiguilles d'une montre). Un point décrivant le cycle C correspondant au point P, en partant d'une position initiale située du même côté que le point P par rapport à un axe Ox qu'on se donne dans le plan, coupe cet axe *d'abord* en un point M_1, *puis* en un point M_2. O étant une origine fixe prise sur l'axe Ox, nous poserons

$$OM_1=\zeta_1,\quad OM_2=\zeta_2.$$

La position du point P sur le plan entraîne la connaissance de ζ_1 et ζ_2, et réciproquement ζ_1 et ζ_2 déterminent la position du point P sans ambiguïté (sauf dans un cas). En effet, le point P est le centre d'un cercle de rayon μ passant par les points M_1 et M_2, et il est situé au-dessus ou au-dessous de l'axe Ox suivant que ζ_1 est inférieure ou supérieure à ζ_2, ou encore que M_1M_2 est dirigé dans le sens positif ou négatif de l'axe Ox.

Digitized by Google

Les quantités ζ_1 et ζ_2 déterminant le point P comme centre d'un cycle seront dites les *coordonnées cycliques* du point P(*).

Le cas ambigu est celui où $\zeta_1 = \zeta_2$. La convention faite ne suffit pas à distinguer parmi les deux points répondant à ces coordonnées celui qui est au-dessus de l'axe, de celui qui est au-dessous. Mais la nature des questions traitées exclura le doute.

2. Menant par le point O une perpendiculaire Oy à Ox, et appelant x et y les coordonnées du point M rapporté à ces deux axes, on voit que

$$(1) \qquad x = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}, \quad y = \pm\sqrt{\mu^2 - \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)^2}, \qquad (2)$$

le radical étant pris avec le signe + ou avec le signe — suivant que $\zeta_2 - \zeta_1$ est positif ou négatif. On a ainsi le moyen de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cycliques. Pour le passage inverse, il suffit de remarquer que de (1) et (2) on déduit

$$(3) \qquad \zeta_1\zeta_2 = x^2 + y^2 - \mu^2.$$

(1) et (3) montrent alors que ζ_1 et ζ_2 sont les racines de l'équation

$$(4) \qquad \zeta^2 - 2x\zeta + (x^2 + y^2 - \mu^2) = 0,$$

ζ_1 étant la plus petite ou la plus grande des deux racines de cette équation suivant que y est positif ou négatif. Par exemple, si y est positif

$$(5) \qquad \zeta_1 = x - \sqrt{\mu^2 - y^2}, \quad \zeta_2 = x + \sqrt{\mu^2 - y^2}.$$

Si l'on suppose $\mu = 0$, on voit que chaque point du plan est déterminé par deux quantités imaginaires conjuguées, et que si, à la manière de Cauchy, on représente la quantité imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par le point (α, β), la quantité imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ est le ζ_2 du point (α, β). En d'autres termes, *pour* $\mu = 0$, *l'affixe de tout point du plan est le* ζ_2 *de ce point*.

3. Je ne m'étendrai pas longuement ici sur la théorie des coordonnées

---

(*) L'idée de ce système de coordonnées peut être généralisée ainsi : Considérons dans un plan un système de courbes dépendant de deux paramètres p et q, et telles qu'à chaque couple de valeurs de p et q corresponde une courbe parfaitement déterminée dans le système. Supposons, en outre, qu'un certain point P soit lié sans ambiguïté à chaque courbe du système. Les paramètres p et q pourront alors être pris comme coordonnées du point P. (M. O.)

Digitized by Google

cycliques qui pourrait, par les formules précédentes, se déduire de la théorie des coordonnées cartésiennes.

Ainsi, en différentiant les formules (1) et (2), on déduirait sans peine la détermination de la tangente ou de la normale en un point d'une courbe en coordonnées cycliques de leur détermination en coordonnées cartésiennes; mais voici un résultat, obtenu directement, qui est plus élégant.

La normale au point P, à la courbe dont l'équation est $\varphi(\zeta_1, \zeta_2) = 0$, coupe en m_1 et m_2 les perpendiculaires élevées à Ox en M_1 et M_2 et en N cet axe Ox. Les segments PM_1 et PM_2 étant constants, on a, en appelant $d(P)$, $d(M_1)$, $d(M_2)$ les différentielles des longueurs parcourues simultanément par les points P, M_1, M_2(*),

$$\frac{d(M_1)}{d(P)} = \frac{M_1 m_1}{P m_1}, \quad \frac{d(M_2)}{d(P)} = \frac{M_2 m_2}{P m_2},$$

d'où

$$\frac{d(M_1)}{d(M_2)} = \frac{M_1 m_1 \cdot P m_2}{M_2 m_2 \cdot P m_1}.$$

Mais

$$d(M_1) = d\zeta_1, \quad d(M_2) = d\zeta_2, \quad \frac{P m_1}{P m_2} = -1, \quad \frac{M_1 m_1}{M_2 m_2} = \frac{NM_1}{NM_2};$$

donc

$$\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2} = -\frac{NM_1}{NM_2};$$

et, par suite,

$$\frac{NM_1}{NM_2} = \frac{\varphi'_{\zeta_2}}{\varphi'_{\zeta_1}}.$$

Nous désignerons par n_1 et n_2 les distances prises avec leur signe, du pied N de la normale aux points M_1 et M_2 déterminant le cycle du point P. Nous aurons alors

$$n_1 \varphi'_{\zeta_1} = n_2 \varphi'_{\zeta_2}. \tag{6}$$

Cette remarquable formule, beaucoup plus simple que celle qui se déduirait de la théorie des coordonnées cartésiennes, détermine la normale sans aucune ambiguïté.

(*) Propriété fondamentale du centre instantané de rotation, lequel est m_1 pour PM_1, m_2 pour PM_2. Cette propriété, comme on le sait, se démontre aisément par la géométrie élémentaire.

Digitized by Google

II. Applications.

4. Les formules (5) font voir immédiatement, *avec la convention faite au sujet de* ζ_1 *et* ζ_2, que l'équation

$$A\zeta_1 + B\zeta_2 + C = 0$$

représente *deux quadrants* opposés d'une ellipse dont le centre est situé sur Ox à la distance $\frac{-C}{A+B}$ de l'origine, et dont les demi-axes sont $\mu\frac{A-B}{A+B}$ suivant Ox, μ perpendiculairement à Ox. Les deux autres quadrants sont déterminés par

$$A\zeta_2 + B\zeta_1 + C = 0.$$

Si $A = -B$, l'ellipse se réduit à deux parallèles à Ox situées à la distance μ, de part et d'autre de cet axe.

Si l'ellipse a son centre en O, ses deux couples de quadrants sont déterminés par

$$\zeta_2 = k\zeta_1 \quad \text{et} \quad \zeta_1 = k\zeta_2. \tag{7}$$

La formule (6) donne alors pour le premier quadrant $-kn_1 = n_2$, c'est-à-dire que le point N est conjugué harmonique du point O par rapport aux points M_1 et M_2. Donc :

Si le cercle qui a pour centre un point P *pris sur une ellipse et pour diamètre la longueur de l'un des axes de cette ellipse coupe l'autre axe aux points* M_1 *et* M_2, *la normale au point* P *est conjuguée harmonique du rayon vecteur* OP *issu du centre par rapport aux droites* PM_1 *et* PM_2.

Ce théorème me semble nouveau. L'équation (7) rend intuitive cette propriété bien connue : *tout point d'un segment de droite de longueur constante glissant entre deux axes rectangulaires décrit une ellipse.*

5. L'équation d'un cercle de rayon R ayant son centre sur Ox à la distance a de l'origine est

$$\zeta_1\zeta_2 - a(\zeta_1 + \zeta_2) = R^2 - a^2 - \mu^2. \tag{8}$$

Si le centre est à l'origine O, cette équation se réduit à

$$\zeta_1\zeta_2 = R^2 - \mu^2, \tag{9}$$

équation non moins remarquable que (7), et susceptible de nombreuses applications. Elle peut, en particulier, servir à la représentation d'une involution, et cette propriété de l'involution ne semble pas encore avoir été remarquée :

Digitized by Google

Si par chaque couple de points correspondants d'une involution on fait passer un cercle de rayon constant, les centres de tous ces cercles sont sur un cercle ayant pour centre le point central de l'involution.

On déduit de là une solution nouvelle et simple de ce problème : *Construire une involution dont on connaît deux couples de points correspondants.*

6. Une hyperbole équilatère dont le demi-axe est k et qui a son axe transverse dirigé suivant Ox, son centre étant à la distance a de l'origine, a pour équation, toujours d'après les formules du n° 2,

$$\frac{\zeta_1^2+\zeta_2^2}{2}-a(\zeta_1+\zeta_2)=k^2-a^2+\mu^2, \tag{10}$$

et si son centre coïncide avec l'origine

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2=2(k^2+\mu^2). \tag{11}$$

L'application de la formule (6) donne dans ce cas

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{\zeta_2}{\zeta_1},$$

d'où l'on conclut que *dans l'hyperbole équilatère, la normale en un point* P *est symétrique du rayon vecteur* OP *issu du centre, par rapport à la perpendiculaire abaissée du point* P *sur l'axe transverse.*

Lorsque $k=0$, les équations (10) et (11) représentent l'ensemble de deux droites inclinées à 45° sur l'axe Ox.

7. L'équation d'une parabole de paramètre p, ayant son axe dirigé suivant Ox et son sommet à la distance a de l'origine, est

$$\left(\frac{\zeta_1-\zeta_2}{2}\right)^2+p(\zeta_1+\zeta_2)-2pa-\mu^2=0, \tag{12}$$

et si le sommet coïncide avec l'origine

$$\left(\frac{\zeta_1-\zeta_2}{2}\right)^2+p(\zeta_1+\zeta_2)-\mu^2=0. \tag{13}$$

La formule (6) donne

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{p+\dfrac{\zeta_2-\zeta_1}{2}}{p-\dfrac{\zeta_2-\zeta_1}{2}},$$

d'où la propriété bien connue : *Dans la parabole, la sous-normale est constante et égale au paramètre.*

Digitized by Google

III. Dualité cyclique.

8. On peut appliquer aux coordonnées cycliques l'idée fondamentale du *principe de dualité*, pris dans le sens le plus général (*).

Prenons la démonstration d'un théorème au moyen des coordonnées cartésiennes, et remplaçons partout dans cette démonstration x par ζ_1, et y par ζ_2. Nous obtenons ainsi la démonstration d'un autre théorème en coordonnées cycliques, et nous pourrons énoncer ce théorème si nous savons la signification des équations en ζ_1 et ζ_2 obtenues. Cette idée est extrêmement féconde. Je me contenterai de la signaler sans beaucoup y insister. Le lecteur, avec ce qui est dit ici, suppléera aisément aux développements que je laisse de côté. Je donnerai néanmoins quelques exemples destinés à éclaircir cette idée.

Ainsi, prenons cette propriété : *Le point de contact d'une tangente à un cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette tangente.* Donc, si la ligne $y = mx + n$ est tangente à la courbe $x^2 + y^2 = R^2$, le point de contact se trouve sur la ligne $my + x = 0$.

De même, si la courbe $\zeta_2 = m\zeta_1 + n$ est tangente à la courbe $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = R^2$, le point de contact se trouve sur la courbe $\zeta_2 = -\frac{1}{m}\zeta_1$.

Les n^os^ 4 et 6 nous donnent la clef de ces équations, et nous voyons immédiatement que le résultat précédent se traduit ainsi : *Si une ellipse, ayant un axe* $2a$ *dirigé suivant l'axe transverse d'une hyperbole équilatère, l'autre axe étant* $2b$, *est tangente à cette hyperbole, le point de contact* (il y en a nécessairement un second symétrique par rapport à l'axe commun) *est sur l'ellipse concentrique à l'hyperbole et dont les axes sont, suivant l'axe transverse,* $(2b^2 : a)$, *suivant la perpendiculaire à cet axe,* $2b$.

On peut énoncer ce théorème d'une façon plus élégante : *Soient* E *et* E′ *deux ellipses, de centres* O *et* O′, *ayant leurs axes* $2a$ *et* $2a'$ *dirigés suivant* OO′, *leurs seconds axes étant tous deux égaux à* $2\sqrt{aa'}$. *Si, laissant* E *fixe, on fait glisser* E′ *le long de* OO′, *et que, pour chacune de ses positions, on prenne l'hyperbole équilatère de centre* O *qui lui est bitangente, les points de contact se trouvent sur l'ellipse* E.

Soit encore ce théorème : *Dans l'hyperbole équilatère, la tangente et le*

(*) Voir d'autres applications, N. A. M., 1885 (3), IV, p. 110; et *Coordonnées parallèles et axiales* (Paris, Gauthier-Villars, 1885), p. 52.

Digitized by Google

diamètre du point de contact sont également inclinés sur les asymptotes. Donc, si la courbe $y = mx + n$ est tangente à la courbe $xy = k^2$, le point de contact se trouve sur la courbe $y = -mx$. De même, si la courbe $\zeta_2 = m\zeta_1 + n$ est tangente à la courbe $\zeta_2\zeta_1 = k^2$, le point de contact se trouve sur la courbe $\zeta_2 = -m\zeta_1$.

Ce qui a été vu aux nos 4 et 5 permet alors d'énoncer ce théorème : *Si une ellipse de centre* O′ *dont les axes sont* $2a$ *suivant* OO′, *et* $2b$, *est bitangente à un cercle de centre* O, *les points de contact se trouvent sur une ellipse de centre* O *ayant les axes* $(2b^2 : a)$ *suivant* OO′, *et* $2b$.

9. Je me bornerai aux exemples précédents qui font pressentir tout le parti qu'on peut tirer de la méthode. Voici, comme application, quelques remarques qui découlent des formules démontrées plus haut :

Si l'on a, en coordonnées cartésiennes :

1° Une droite D.

2° Une droite symétrique de D par rapport à la bissectrice de xOy.

3° Deux droites perpendiculaires.

4° Une hyperbole équilatère ayant son centre sur la bissectrice de xOy et ses asymptotes parallèles à Ox et Oy. (Coordonnées du centre : $x = a$, $y = a$. Demi-axe transverse : k).

5° Un cercle ayant son centre sur la bissectrice de xOy. (Coordonnées du centre : $x = a$, $y = a$. Rayon : R).

6° Une parabole ayant son axe dirigé suivant la bissectrice de xOy (Coordonnées du sommet : $x = d$, $y = d$. Paramètre : P).

On a, en coordonnées cycliques :

1° Deux quadrants opposés d'une ellipse E, ayant un axe dirigé suivant Ox.

2° Les deux autres quadrants de l'ellipse E.

3° Deux couples de quadrants opposés dans des ellipses ayant des axes $2a$ et $2a'$ dirigés suivant Ox, et leurs autres axes égaux tous deux à $2\sqrt{aa'}$.

4° Un cercle ayant son centre sur Ox. (Distance du centre à l'origine O : a. Rayon : $R^2 = \frac{k^2}{2} + \mu^2$).

5° Une hyperbole équilatère ayant son axe transverse dirigé suivant Ox. (Distance du centre à l'origine : a. Demi-axe transverse $k^2 = \frac{1}{2}R^2 - \mu^2$).

6° Une parabole ayant son axe dirigé suivant Ox (Distance du sommet à l'origine : $d + (\mu^2 : P\sqrt{2})$ Paramètre : $p = -(P : \sqrt{2})$).

Le rapprochement des cas (4°) et (5°) mérite d'être remarqué.

Digitized by Google

APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES(*).

4. *Sur une suite de cercles.* Dans le *Journal de Crelle*, t. I (1826), pp. 161-184 et pp. 252-288 (*Gesammelte Werke*, t. I, pp. 47-76), Steiner s'occupe, avec beaucoup de développements, d'une proposition qu'il emprunte aux *Collections mathématiques* de Pappus (Liv. IV, théor. XII-XVIII) et que le géomètre d'Alexandrie cite comme étant déjà ancienne(**). La théorie de l'inversion fournit une démonstration simple et intuitive des résultats rapportés par Pappus et de ceux qui sont dus à Steiner.

En effet, soient deux cercles fixes, de centres M, M', qui se touchent intérieurement en un point O. Décrivons une suite de cercles $C_1, C_2, C_3, \ldots$ tangents aux cercles M, M' et dont chacun touche celui qui le suit. Soient r_n le rayon du cercle C_n, y_n la perpendiculaire C_nP_n abaissée de son centre sur la ligne des centres Ox des cercles fixes, x_n la distance OP_n. Si l'on soumet la figure à une inversion en prenant pour pôle le point O, les circonférences M, M' se transforment en deux droites d, d' perpendiculaires à Ox; les circonférences C_1, C_2, C_3, ... se transforment en des circonférences D_1, D_2, D_3, ... inscrites aux droites d, d' et touchant, chacune, la circonférence suivante. Désignons par z_1, z_2, z_3, ... les distances D_1Q, D_2Q, D_3Q, ... des centres à la droite Ox, par r le rayon des cercles D_1, D_2, D_3, ... On a

$$z_{n+1} = z_n + 2r, \quad \text{ou} \quad \frac{z_{n+1}}{r} = \frac{z_n}{r} + 2.$$

Or

$$\frac{z_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{OD_{n+1}}{OC_{n+1}} = \frac{r}{r_{n+1}}, \quad \frac{z_n}{y_n} = \frac{r}{r_n},$$

ou

$$\frac{z_{n+1}}{r} = \frac{y_{n+1}}{r_{n+1}}, \quad \frac{z_n}{r} = \frac{y_n}{r_n}.$$

(*) Rectification : Dans l'article précédent, n° 1, ligne 6, lire après le mot *lemniscate*, les suivants : si l'angle XOY est droit.

(**) *Circumfertur in quibusdam libris antiqua propositio hujus modi.*

Digitized by Google

Donc

$$\frac{y_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{y_n}{r_n} + 2.$$

Ainsi, *les rapports de l'ordonnée du centre d'un cercle* C_1, C_2, C_3, ... *au rayon de ce cercle forment une progression arithmétique dont la raison est* 2. En particulier, *si le premier cercle* C_1 *a son centre sur* Ox *ou touche* Ox, *ces rapports ont, respectivement, les valeurs* (*)

0, 2, 4, 6, 8, ... ou 1, 3, 5, 7, ...

Si l'on prend pour pôle d'inversion le point O, pour puissance le carré de la tangente menée de B au cercle C_1, les circonférences M, M' se transforment en deux droites tangentes au cercle C_1(**); il résulte de là que

$$x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 = 2(x_1 - r_1)R = 2(x_1 + r_1)R',$$

R et R' étant les rayons OM, OM' des cercles donnés. On peut déduire, de ces formules, x_1 et y_1 en fonction de r_1, ensuite une relation entre r_1, r_2, R, R'.

Les points C_1, C_2, C_3, ... appartiennent à une ellipse qui a pour foyers les points M, M' et dont un sommet est en O; ils sont les sommets d'un polygone circonscrit à une seconde ellipse. Les points de contact mutuels des cercles C_1, C_2, C_3, ... sont situés sur une circonférence qui touche en O les circonférences données. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Mécanique, par M. Despeyrous, ancien professeur à la faculté des Sciences de Toulouse, **avec des notes** par M. G. Darboux, membre de l'Institut, professeur à la faculté des sciences. Deux volumes in-8°, 1100 pages (250 de notes). Prix : 22 francs. Paris, Hermann, 1884-1886.

Despeyrous était un professeur éminent; la seule réputation qu'il a laissée sous ce rapport suffirait pour attirer l'attention sur son Cours, dont la publication est due à des mains amies. Sa forme, entièrement classique, se rattache dans l'ensemble à la Mécanique de Duhamel. Despeyrous y a suivi l'ordre ancien, aujourd'hui justement abandonné : *Statique, Cinématique, Dynamique.* Malgré tous les plai-

---

(*) M. Casey démontre également ces résultats au moyen de la théorie de l'inversion (*A Sequel to Euclid*, p. 103).

(**) De là résulte un moyen très simple de construire un cercle C_2 qui touche trois cercles donnés M, M', C_1, tangents deux à deux.

Digitized by Google

doyers en sens contraire, nous croyons qu'il est impossible, sans postulats déguisés, d'établir la théorie des forces sans partir de l'observation et de l'analyse des mouvements. Par contre, on doit louer l'auteur d'avoir introduit ou conservé dans un traité classique des questions d'un vif intérêt qu'on laisse trop souvent de côté, l'étude du pendule par les fonctions elliptiques, la théorie de Puiseux sur les courbes tautochrones, les éléments de la théorie du potentiel et l'attraction des ellipsoïdes, le pendule de Foucault, le mouvement d'un solide pesant fixé par un point de son axe de figure, les phénomènes gyroscopiques; enfin, les équations de la dynamique sous les formes dues à Lagrange et à Hamilton.

Le Cours de Despeyrous est écrit dans la manière lucide, élégante de la bonne école française; les théories importantes (forces centrales, propriétés générales du mouvement des systèmes) y sont éclaircies par bon nombre d'exemples bien choisis et bien traités; c'est un ouvrage recommandable pour le *Selbstunterricht.*

Mais ce qui donne à cette publication une valeur et un intérêt particuliers, ce sont les nombreuses notes qu'y a jointes M. Darboux, en les extrayant de ses propres travaux parus dans les Mémoires de Bordeaux, le *Bulletin des Sciences mathématiques*, etc. Arrêtons-nous un instant sur ces *Notes*, aussi remarquables par la forme que par le fond.

Note I. *Sur la composition des forces en statique :* Le but de la note est d'examiner à fond les démonstrations purement statiques du parallélogramme des forces (Daniel Bernoulli, d'Alembert, Cauchy, etc.), d'indiquer les postulats qu'il est nécessaire d'introduire pour rester rigoureux et ne rien emprunter à la théorie du mouvement. L'auteur discute avec beaucoup de finesse et de rigueur tous les points, et prouve que les postulats nécessaires et suffisants peuvent se réduire à *quatre :* 1° la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point doit être unique et déterminée, indépendante de l'ordre dans lequel on les compose, 2° indépendante de l'orientation du système des forces dans l'espace; 3° la loi de la composition des forces doit se réduire à l'addition algébrique dans le cas de forces de même direction; 4° une certaine fonction φ (P) doit être continue (ou être toujours positive).

Note II. Un très beau théorème sur la résultante d'un système de forces concourant en un point quelconque O de l'espace et proportionnelles à des masses données et aux distances de points donnés à ce point O. Un second théorème, qui généralise une propriété du centre de gravité d'un système de masses signalée par Lagrange.

Note III. Théorèmes, dont plusieurs connus, sur le volume et le centre de gravité d'un solide dont les aires des sections parallèles à un plan fixe s'expriment par une fonction du 2^{me} ou du 3^{me} degré de la distance à ce plan fixe. Propriétés des sections faites dans une surface réglée.

Note IV. Réciproque et généralisation de ce théorème : Les directions de quatre forces en équilibre sont les génératrices d'un même système d'une surface du second ordre.

Note V. Extrait du mémoire sur l'équilibre astatique (1877), donnant les douze équations auxquelles doit satisfaire un système de forces appliquées à un solide

Digitized by Google

libre pour que l'équilibre subsiste dans toutes les positions du corps, les forces conservant même intensité, même direction, mêmes points d'application.

Note VI. Les conditions d'équilibre d'un fil tendu sur la surface d'un ellipsoïde conduisent facilement et élégamment à l'équation différentielle du premier ordre des lignes géodésiques sur cette surface et à la relation PD = *const.* de Joachimsthal. M. D. montre pourquoi cette relation appartient aussi aux lignes de courbure.

Note VII. Solution complète de ce joli problème : Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible parcouru par un courant, sous l'action d'un pôle d'aimant. La tension du fil est constante; la figure d'équilibre est une ligne géodésique d'un cône de révolution qui a son sommet au pôle. On donne le moyen de construire ce cône, connaissant la longueur du fil et ses extrémités.

Note VIII. Beau mémoire sur le mouvement d'une figure plane dans son plan. On montre que l'aire décrite par le rayon vecteur d'un point de la figure mobile, quand celle-ci passe d'une position à une autre, est égale à la moitié de la rotation de la figure multipliée par la puissance de ce point par rapport à un cercle déterminé de la figure mobile. Dans les mouvements fermés, le centre de ce cercle est au *centre de gravité des courbures* (Steiner) de la roulette mobile. Si l'on prend trois points en ligne droite, on trouve des relations élégantes comprenant le théorème de Holditch. De même, en étudiant par l'analyse les enveloppes des droites de la figure, on retrouve le théorème bien connu et celui-ci : l'arc enveloppé par une droite quelconque, entre deux positions, a pour mesure l'angle de rotation multiplié par la distance de la droite à un point fixe de la figure mobile. Ce mémoire a paru (plus complet) dans le *Bulletin* de 1878 à la suite d'une très intéressante communication de M. Liguine sur les aires des roulettes.

Note IX. Décrit un nouveau système articulé à *cinq* tiges, de M. Hart, propre à décrire une ligne droite et se transformant, dans certaines conditions, en un compas à ellipses. Théorie de cet appareil, extension à un système plus compliqué (On consultera sur ce sujet un autre travail de M. Darboux, t. III, 2me série, du *Bulletin*, et les très instructives conférences de M. Neuberg, Liège, 1886).

Note X. Démonstration fort simple *a posteriori*, d'après M. O. Bonnet, de la propriété de la cycloïde d'être la brachystochrone dans le vide.

Note XI. Jacobi a démontré que si la force centrale qui agit sur un point s'exprime par $\frac{f(\omega)}{r^3}$ (r rayon vecteur, ω angle polaire), les équations du mouvement s'intègrent et la trajectoire, ainsi que le temps, s'obtiennent par quadrature. M. Darboux tire de là quelques conséquences intéressantes.

Note XII Traite un problème posé par M. Bertrand à propos des lois de Kepler; — démontre géométriquement ce résultat (Halphen) : Quand une force fonction de la position du point lui fait décrire une trajectoire plane quelle que soit la vitesse initiale, cette force passe par un point fixe ou est parallèle à une droite fixe; — résout par l'analyse cette question : un point sollicité par une force centrale décrit une conique, trouver la loi de la force en fonction de la position. Outre les deux solutions connues $\left(\varphi = ar \text{ et } \varphi = \frac{a}{r^3}\right)$, M. D. en trouve deux autres dans

Digitized by Google

lesquelles la force dépend de r et de ω, avec l'équation générale correspondante de la trajectoire; il fait voir qu'il n'y a pas d'autres solutions (V. *Comptes rendus*, 1877, I, pp. 760 et 936).

NOTE XIII. Sur le tautochronisme eu égard au frottement. On retrouve les résultats signalés par Puiseux et on montre que les seules courbes tautochrones pour des forces centrales proportionnelles à la distance sont celles de Puiseux.

NOTE XIV. Démontre ce théorème : Si l'on considère un mobile attiré par un centre fixe dont l'action est fonction de la distance, l'attraction proportionnelle à la distance et celle en raison inverse du carré de la distance sont les seules pour lesquelles la trajectoire soit toujours fermée.

NOTE XV. Problème analogue pour un mobile sur une surface de révolution, la force passant par l'axe. Conséquences géométriques curieuses.

NOTE XVI. Consacrée au développement d'un théorème énoncé par l'auteur dans son Mémoire sur les théorèmes d'Ivory : Si l'on sait calculer l'attraction d'un ellipsoïde sur un point quelconque pour une loi d'attraction en fonction $\psi'(u)$ de la distance, on saura la calculer pour la loi $\psi'\left(\sqrt{u^2+k^2}\right)\frac{u}{\sqrt{u^2+k^2}}$, k étant une constante quelconque.

NOTE XVII. Très importante; elle roule sur l'herpolhodie et sur la théorie de Poinsot. La méthode est entièrement analytique. Après avoir établi les équations de la polhodie, M. D. en déduit celles de l'herpolhodie en suivant une voie bien plus commode que celle de Poinsot, habituellement adoptée, et qui consiste à établir entre le rayon vecteur et l'arc de la polhodie une relation qui subsiste nécessairement pour l'herpolhodie. M. D. se sert de la remarque suivante : les aires élémentaires du cône fixe et du cône roulant coïncident, et il en est de même de leurs projections sur le plan tangent à l'ellipsoïde central. Or, on obtient facilement les projections de l'aire élémentaire sur les plans principaux de l'ellipsoïde et les angles de ceux-ci avec le plan tangent, ce qui conduit rapidement et sous forme élégante à l'expression de l'aire élémentaire de l'herpolhodie, le pôle étant à la projection du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent. Joignant cette formule à l'expression de la vitesse rotatoire au moyen du rayon vecteur, on trouve deux équations du mouvement du pôle instantané de rotation du corps sur le plan tangent, de la forme

$$\rho^2\frac{d\theta}{dt}=m\rho^2+n,\quad \rho\frac{d\rho}{dt}=k\sqrt{-\mathrm{F}(\rho^2)},$$

ρ, θ étant les coordonnées polaires de la courbe, $\mathrm{F}(\rho^2)$ un polynôme du 3me degré en ρ^2. M. D. montre que tout système de deux équations semblables représente une herpolhodie, si l'on a la relation $n^2=k^2\mathrm{F}(0)$; mais la surface roulante n'est pas nécessairement un ellipsoïde d'inertie.

Il met encore l'équation différentielle de l'herpolhodie sous d'autres formes, dont l'une, très simple, lui permet de démontrer presque sans calcul que, dans le cas d'un ellipsoïde d'inertie, la courbe ne peut avoir de point d'inflexion. Théorème signalé par M. de Sparre et souvent démontré depuis, mais que M. Hess de Munich avait trouvé dès 1880 (*Ueber das Rollen einer Fläche vom zweiten Grade*, *u. s. w.*).

Digitized by Google

Parmi d'autres résultats importants donnés dans cet article, notons celui-ci : en combinant la représentation du mouvement par le roulement du cône mobile sur le cône fixe de Poinsot, avec une autre représentation qui lui est due aussi, le roulement d'un troisième cône sur le plan tangent invariable, on peut représenter en même temps la loi du temps, et l'on a une image complète du mouvement du corps. M. Sylvester a donné une solution du même problème (*Philos. Trans.*, 1866) : M. D. s'en occupe, il établit au sujet des normales de longueur constante menées à l'ellipsoïde le long de la polhodie, un beau théorème de géométrie, qui lui fournit une infinité de manières de réaliser le mouvement de Poinsot par le roulement d'un ellipsoïde, ou même d'une ellipse, sur un plan fixe. Il déduit de là, sans calcul, la loi du mouvement trouvée par Jacobi au moyen des fonctions elliptiques.

Note XVIII. *Sur deux mouvements différents correspondant à une même polhodie.* Dans ce travail d'un haut intérêt, la question traitée conduit à des résultats géométriques inattendus et en combinant un théorème de La Gournerie avec le théorème d'Ivory sur les surfaces homofocales, on obtient le beau théorème de M. Greenhill sur l'hyperboloïde articulé.

La Note XIX exige l'étude de la précédente, elle est aussi très remarquable. M. D. montre d'abord que, dans les deux mouvements de Poinsot qui répondent à une même polhodie, le mouvement relatif d'une herpolhodie par rapport à l'autre est le mouvement d'un corps pesant qui aurait une sphère pour ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe. Il ramène à ce cas celui d'un solide de révolution quelconque et retrouve ainsi le beau théorème de Jacobi mis au jour par M. Weierstrass (*Œuvres de Jacobi*, t. II) : le mouvement le plus général d'un solide pesant autour d'un point de son axe de figure est une combinaison de deux mouvements de Poinsot attribués à un système mobile, l'un par rapport à des axes fixes, l'autre par rapport au corps considéré. Il admet cette représentation géométrique remarquable : le roulement d'un cône qui a pour base une herpolhodie, sur une sphère ayant son centre sur la verticale du point fixe. Étude de la courbe sphérique décrite par le pôle instantané.

Note XX. Extension de la théorie de la rotation d'un corps pesant au cas où la force admet un potentiel dépendant de l'angle que fait l'axe du corps avec une droite fixe.

Note XXI. *Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps.* Mémoire important sur la théorie des percussions, exposée d'une manière bien plus rigoureuse qu'on ne le fait d'habitude : il renferme plusieurs belles propriétés générales relatives au choc de deux systèmes matériels.

Note XXII. *Sur les rapports de la théorie des moments d'inertie avec celle des surfaces homofocales.* On connaît, là-dessus, un célèbre théorème de Binet qui donne les axes principaux d'inertie relatifs à un point quelconque de l'espace. En introduisant deux autres espèces de moments d'inertie (relatifs à un point et à un plan), M. D. démontre une série de beaux théorèmes concernant les moments d'inertie, les surfaces homofocales, etc.

Ph. Gilbert, *professeur à l'Université de Louvain.*

Digitized by Google

APPLICATION DES PROPRIÉTÉS DE TROIS FIGURES SEMBLABLES(*);

par M. le Dr R. H. Van Dorsten, de Rotterdam.

Soient $\alpha\beta\gamma$ un triangle quelconque homothétique au triangle ABC par rapport au point de Lemoine K; D, E, F les points de rencontre de BC, CA, AB avec $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$; D', E', F' les points de rencontre avec $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$; O, O' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$. Les triangles AE'F, DBF', D'EC, que nous désignons par T_1, T_2, T_3, sont directement semblables et déterminent trois figures semblables F_1, F_2, F_3; soient S_1, S_2, S_3 les centres de similitude et P_1, P_2, P_3 les points invariables de ces figures. On a les propriétés suivantes :

1° Les points S_1, S_2, S_3 se trouvent sur les symédianes de ABC;

2° Les triangles T_1, T_2, T_3 sont perspectifs avec le triangle $S_1S_2S_3$;

3° Les points P_1, P_2, P_3 sont également situés sur les symédianes de ABC, et les tangentes en ces points au cercle de similitude sont parallèles à E'F, F'D, D'E;

4° Les points P_1, P_2, P_3 sont les centres de gravité des triangles T_1, T_2, T_3;

5° Le centre N du cercle de similitude partage OO' dans le rapport 1 : 2;

6° La Pascale de l'hexagone $S_1P_2S_3P_1S_2P_3$ est la polaire de K par rapport au cercle de similitude.

Note I. Le cas de trois figures semblables traité par M. van Dorsten présente un très grand intérêt : Le point directeur (*Mathesis*, t. VI, p. 148) est le point de Lemoine du triangle des points doubles et de celui des points invariables; les droites homologues font entre elles les angles $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ et les segments homologues sont inversement proportionnels à BC, CA, AB.

II. Dans l'étude de trois figures semblables F_1, F_2, F_3, il est commode de se servir d'une figure auxiliaire que nous appellerons *module* de F_1, F_2, F_3. Par un même point Σ, menons trois droites ΣM, ΣN, ΣP dont les angles $M\Sigma N$, $N\Sigma P$, $P\Sigma M$ sont supplémentaires des angles du triangle formé par trois droites homologues de F_1, F_2, F_3, et dont les longueurs sont proportionnelles à trois segments homologues : le triangle MNP et le point Σ constituent le module. Si A_1, A_2, A_3 sont trois points homologues

(*) Voir *Mathesis*, t. II, p. 73; t. VI, pp. 97 et 148.

Digitized by Google

quelconques, les triangles $S_2A_1A_2$, $S_1A_2A_3$, $S_2A_3A_1$ sont directement semblables aux triangles ΣMN, ΣNP, ΣPM. On peut prendre pour le point Σ et le triangle MNP, l'inverse du point directeur par rapport au triangle invariable et le triangle des projections de cet inverse sur les côtés du triangle invariable.

Dans le cas considéré par M. van Dorsten, le module est constitué par le centre de gravité de ABC et ses projections sur les côtés de ce triangle.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

×Question 465.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

Sur les milieux N, P ***des côtés*** AC, AB ***du triangle*** ABC, ***on élève des perpendiculaires coupant en*** N′ ***et*** P′ ***la médiane*** AM. ***Démontrer*** 1° ***que les droites*** BP′, CN′ ***se rencontrent en un point*** D ***sur la symédiane*** AM′; 2° ***que*** $\overline{AD}^2 = BD \cdot CD$. (L. Verniory.)

Soit à chercher un point S tel que les triangles SAB, SCA soient semblables. Les hauteurs abaissées de S sur AB, AC étant proportionnelles aux bases AB, AC, on voit que AS coïncide avec la symédiane AM′. L'angle $ABS = SAC = MAB$; donc BS et AM se coupent sur la médiatrice PP′ de AB. De même, ES et AM concourent sur la droite NN′. Il résulte de là que S est le point désigné dans l'énoncé par D; c'est aussi la projection du centre O du cercle ABC sur AM′.

Le similitude des triangles DAB, DCA donne immédiatement(**)

$$\overline{AD}^2 = BD \cdot CD.$$

Autre solution par M. Meurice.

(*) Pendant l'impression du n° de juin, nous avons reçu de bonnes solutions de la question 560, par M. Jamet et par M. Gérondal (Thuin).

La solution de la question 389, t. VII, p. 69, doit être complétée ainsi : Si $b = c$, la cubique se décompose en la bissectrice de l'angle BAC et une conique passant par A, les milieux de AB et AC, et ayant pour axe la bissectrice de BAC. Cette question a été empruntée aux *Wiskundige Opgaven*. Tweede deel, n° CXXII, p. 195.

(**) On voit que la question 465 ne diffère que par l'énoncé d'une proposition connue. (J. N.)

Digitized by Google

Question 468.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

Par un des points d'intersection A *de deux hyperboles équilatères de même centre* O, *on mène une sécante, qui rencontre les deux courbes en* B, B'. *Soient* C, C' *les projections de ces points sur les tangentes en* A *à la courbe correspondante. Démontrer, par la géométrie, que l'angle* COC' *est quadruple*(*) *de l'angle des asymptotes.* (FAUQUEMBERGUE.)

Solution par M. DEPREZ. Je m'appuie sur la propriété suivante : deux diamètres conjugués sont également inclinés sur une asymptote; elle entraîne celle-ci : l'angle de deux diamètres est égal à celui des diamètres conjugués.

D'après la première de ces propositions, on voit facilement que l'angle des tangentes menées par le point A aux hyperboles est double de celui des asymptotes de ces courbes.

D'après le second théorème, si M est le milieu de AB,

$$\text{angle AOM} = \text{MAC} = \text{ACM};$$

le quadrilatère AOCM est donc inscriptible, et

$$\text{angle AOC} = \text{CMB} = 2\,\text{CAB}.$$

De même, angle $\text{AOC}' = 2\,\text{C}'\text{AB}$. Donc l'angle COC' est double de celui des tangentes AC, AC' ou quadruple de celui des asymptotes.

×Question 475.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 238.)

Démontrer que les n^{mes} *réduites des fractions continues* (2, 2, 2, ...). (2, — 2, — 2, ...) *ont pour valeurs respectives*

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}}, \quad \frac{n+1}{n}. \qquad \text{(HAMMOND.)}$$

Solution par MM. JULES COLLIN *et* MANDART. Le théorème se vérifie immédiatement pour les deux premières réduites. En l'admettant pour

---

(*) L'énoncé portait erronément *double* au lieu de *quadruple*.

Digitized by Google

les réduites de rang $n-2$ et $n-1$, on trouve pour les n^{es} réduites

$$\frac{2(1+\sqrt{2})^n - 2(1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}}{2(1+\sqrt{2})^{n-1} - 2(1-\sqrt{2})^{n-1} + (1+\sqrt{2})^{n-2} - (1-\sqrt{2})^{n-2}}, \quad (1)$$

$$\frac{-2n+n-1}{-2(n-1)+n-2} = \frac{n+1}{n}.$$

Le numérateur de (1) revient à

$$(1+\sqrt{2})^{n-1}(3+\sqrt{2}) - (1+\sqrt{2})^{n-1}(3-\sqrt{2}).$$

Or

$$3+\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2, \quad 3-\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^2, \quad \text{etc.}$$

Question 526.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 168.)

Par deux points fixes A, B *on fait passer un cercle quelconque, coupant une droite* L *aux points* C, D. *Les droites* AC *et* BD *se rencontrent en* M, AD *et* BC *en* N. *Trouver* 1° *le lieu des points* M *et* N; 2° *l'enveloppe de la droite* MN. (Farisano.)

Solution géométrique par M. Brocard. Lorsque (L) est parallèle à AB, MN est évidemment perpendiculaire au milieu de AB; donc cette perpendiculaire est le lieu cherché.

Supposons maintenant que les lignes AB et (L) se coupent en O. La diagonale MN du quadrilatère ABDC rendu *complet* rencontre AB au point E conjugué harmonique de O par rapport à AB. Ce point E étant fixe doit être considéré comme l'enveloppe de MN.

Les cercles ABCD déterminent sur (L) une involution. On peut donc regarder les points C comme engendrant une ponctuelle homographique avec celle des points D. Par suite, le point M, intersection des rayons homologues AC, BD de deux faisceaux homographiques, engendre une conique passant par les centres A et B des deux faisceaux. Rien ne distinguant les points C et D l'un de l'autre, le point N engendre la même courbe.

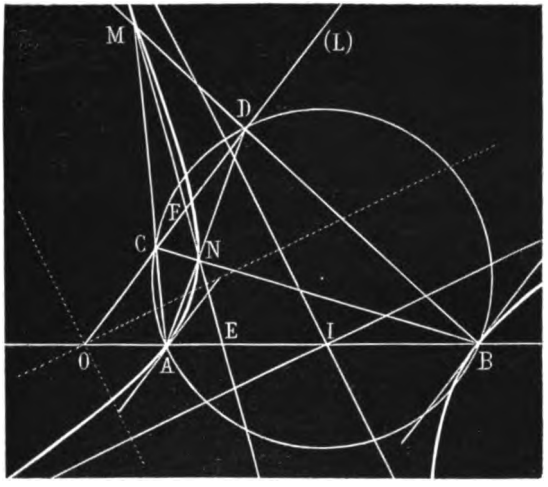
Les droites AC et BD peuvent devenir parallèles; il suffit de prendre sur (L), OC=OA, OD=OB, soit d'un côté de O, soit de l'autre. Donc la

Digitized by Google

conique est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles des droites AB et (L).

Les points de rencontre de l'hyperbole avec la ligne (L) sont les points de contact de celle ci avec les deux cercles tangents à (L) et passant par A et B.

La relation OC . OD = OA . OB montre que, lorsque C est en O, D est à l'infini, et BD est parallèle à (L). Cette parallèle est donc le rayon du faisceau de sommet B qui correspond à AB considéré comme rayon du faisceau de sommet A; elle est donc tangente à l'hyperbole en B. De



même, la tangente en A est parallèle à (L). Il résulte de là que le centre de la conique est au milieu de AB.

Lorsque (L) passe entre A et B, cette droite ne rencontre plus l'hyperbole. La ligne MN est parallèle AB, lorsque O coïncide avec le milieu de AB.

Solution géométrique par MM. Gob, Boedt, Lemoine, Verniory.

Solution analytique, par MM. Renkin, Pleyers, Deprez, G. Russo, et Cl. Thiry. Prenons pour axes de coordonnées AB et (L); O étant l'origine, posons OA = a, OB = b, OC = c, OD = d. On a

$$cd = ab, \qquad (1)$$

Digitized by Google

et les droites AC, BD ont pour équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{c}=1, \quad \frac{x}{b}+\frac{y}{d}=1. \qquad (2)$$

Éliminant c et d entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation du lieu du point M, savoir

$$\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{b}-1\right)=\frac{y^2}{ab}.$$

Ce lieu est une hyperbole équilatère dont le centre est au milieu de AB et qui touche en A et B des parallèles menées à (L).

Les équations des droites AD, BC sont

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{d}=1, \quad \frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1;$$

comme elles ont la même somme que les équations (2), on voit que la droite MN est représentée par cette somme, c'est-à-dire par

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=2;$$

elle coupe donc l'axe des x en un point fixe, indépendant des valeurs de c et d.

Solution par M. Meurice. Prenons pour axes AB et une parallèle à (L) menée par le milieu O de AB. Soit MP l'ordonnée du point M. Les triangles MBP, AMP étant équiangles, on a $\overline{MP}^2 = PA \cdot PB$ ou $y^2 = x^2 - a^2$, $2a$ désignant la distance AB; le lieu est donc une hyperbole équilatère.

On ramène encore le lieu des points M et N à un lieu connu, en observant que les angles MAB et MBA ont une différence constante, égale à l'angle des droites AB et (L).

La droite MN, polaire du point d'intersection des droites AB et (L) par rapport aux angles AMB, ANB, rencontre AB en un point fixe, etc.

M. Deprez traite la question analogue pour la sphère en se servant de coordonnées sphériques, et trouve que le lieu des points M et N est une conique sphérique.

Il remarque également que les cercles ABCD peuvent être remplacés par des coniques passant par A, B et deux points fixes E, F.

Digitized by Google

Question 529.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 168.)

Une droite issue du sommet A ***d'un triangle*** ABC ***coupe le côté*** BC ***en un point variable*** D. ***La bissectrice de l'angle*** ADB ***coupe*** AB ***en*** E, ***celle de l'angle*** ADC ***rencontre*** AC ***en*** F. ***Trouver :*** 1° ***Le lieu du point de rencontre des droites*** AD, CE, BF ; 2° ***l'enveloppe de la droite*** EF.

(DE ROCQUIGNY.)

Solution par M. BROCARD. Des proportions

$$\frac{BD}{AD}=\frac{BE}{EA},\quad \frac{AD}{DC}=\frac{AF}{FC},$$

on conclut, par multiplication :

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1.$$

Donc les droites AD, CE, BF se coupent en un même point M.

Soit $BD=\lambda$. Les équations des droites AD, CE, en coordonnées normales, seront

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{BD\sin B}{DC\sin C}=\frac{\lambda b}{(a-\lambda)c}, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{BE\sin B}{EA\sin A}=\frac{BD\sin B}{AD\sin A}=\frac{\lambda b}{a\sqrt{\lambda^2+c^2-2c\lambda\cos B}}. \tag{2}$$

L'élimination de λ entre ces équations donne

$$\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\alpha^2\gamma^2-2\alpha^2\beta\gamma\cos A=0,$$

équation d'une courbe du quatrième degré ayant des points doubles en A, B, C. Cette courbe est le lieu des points M.

La droite BF est représentée par

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{(a-\lambda)\sin C}{\sin A\sqrt{\lambda^2+c^2-2c\lambda\cos B}}. \tag{3}$$

De (2) et (3), on déduit l'équation de la droite DF :

$$\alpha-\frac{\lambda b}{a\sqrt{\lambda^2+c^2-2c\lambda\cos B}}\beta-\frac{(a-\lambda)c}{a\sqrt{\lambda^2+c^2-2c\lambda\cos B}}\gamma=0,$$

Digitized by Google

à laquelle on peut donner la forme

$$\lambda^2[a^2\alpha^2-(b\beta-c\gamma)^2]-2ac\lambda[a\alpha^2\cos B+\gamma(b\beta-c\gamma)]+a^2c^2(\alpha^2-\gamma^2)=0.$$

Le discriminant de cette équation en λ étant égale à zéro, on a pour l'enveloppe de la droite EF :

$$[a\alpha^2\cos B+\gamma(b\beta-c\gamma)]^2=(\alpha^2-\gamma^2)[a^2\alpha^2-(b\beta-c\gamma)^2],$$

ou après suppression du facteur α^2 :

$$\alpha^2\sin^2 A-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma\cos A=0.$$

M. Deprez a résolu la même question en prenant pour axes deux côtés du triangle. M. Brocard a donné une seconde solution en se servant de coordonnées rectangulaires, et en faisant usage de la propriété que les droites DE, DF enveloppent une parabole ayant pour foyer A et pour directrice BC.

Voici la solution de la question 529 par la géométrie projective.

A toute position de la droite AD correspondent deux positions de la droite CE, car on peut prendre pour E indifféremment le point d'intersection de AB avec l'une ou l'autre bissectrice des angles formés par AD et BC. De même, à toute position de CE correspondent deux droites AD; car, si E′ est le conjugué harmonique de E par rapport au segment AB, le point D est à l'intersection de BC avec la circonférence décrite sur EE′ comme diamètre. Donc entre les faisceaux engendrés par les droites AD, CE il existe une correspondance (2, 2). Il résulte de là que le point d'intersection M des rayons homologues AD, CE engendre une courbe du 4e ordre. Pour le démontrer, remarquons que sur chacun de ces rayons, nous avons deux points variables du lieu et que les centres des deux faisceaux sont des points doubles : lorsque AD coïncide avec AC, CE coïncide avec l'une ou l'autre bissectrice de l'ange ACB, de sorte que C est un point double du lieu et ces bissectrices sont les tangentes; lorsque CE coïncide avec CA, la circonférence EDE′ a un rayon nul(*) et coupe BC en deux points imaginaires, de sorte que A est un point isolé. Il est évident que B est également un point double, et que les tangentes en ce point sont les bissectrices de l'angle ABC.

Entre les ponctuelles marquées par E et F sur AB et AC, il existe aussi une correspondance (2, 2); donc l'enveloppe de la droite EF est de la 4e classe. Mais de cette enveloppe, on peut retrancher deux fois le

(*) Elle est donc remplacée par les droites isotropes menées par A, et celles-ci sont les tangentes en A.

Digitized by Google

point A (ou si l'on veut, deux fois le faisceau des droites passant par A); car lorsque E est en A, les deux points correspondants F sont également en A, et réciproquement. L'enveloppe proprement dite de EF n'est donc que de la deuxième classe. (J. N.)

×Question 555.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 24.)

Soient A', B', C' *les points où les côtés d'un triangle sphérique trirectangle* ABC *sont rencontrés par les arcs de grand cercle joignant les sommets opposés à un point quelconque* M *de la sphère. Démontrer que le périmètre du triangle* A'B'C' *est constant.* (Nicoli, *Journal de Besso.*)

Cette question a été résolue par MM. Beyens (Cadix), Stuyvaert, Emmerich (Mülheim *a*/R.) et Verniory. Nos honorables correspondants emploient le calcul; la solution suivante, dont des traces se retrouvent dans leurs solutions, ne s'appuie que sur la géométrie.

On peut considérer AA', BB', CC' comme étant les trois hauteurs du triangle ABC; donc ces arcs divisent en deux parties égales les angles du triangle A'B'C'(*). Prolongeons A'B'; il en rencontrera les prolongements de AB en D du côté de B, en E du côté de A. Les triangles rectangles C'A'B et DA'B, C'B'A et EB'A sont symétriquement égaux; d'où $A'C' = A'D$, $B'C' = B'E$, et $A'B' + B'C' + C'A' = DA'B'E = \pi$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

576. Une surface est engendrée par une circonférence variable, dont le plan est parallèle au plan représenté par $x + y = 0$, et qui s'appuie sur les axes des x, des y et sur la droite dont les équations sont $y = x$,

---

(*) Pour démontrer que les hauteurs AA', BB', CC' d'un triangle sphérique ABC se coupent en un même point et sont les arcs bissecteurs du triangle A'B'C', on peut construire deux arcs $C'A_1$, $B'A_1$ *symétriques* de C'B' par rapport aux arcs CC', BB'. A_1 étant leur point de rencontre des hauteurs, on voit immédiatement que BB', CC' sont deux arcs bissecteurs extérieurs du triangle $A_1B'C'$, AB et AC deux arcs bissecteurs extérieurs d'où il résulte que BC et l'arc joignant A au point de concours H de BB', CC' sont les arcs bissecteurs de l'angle $B'A_1C'$; donc AH coïncide avec AA', et A_1 avec A'.

Digitized by Google

$z = a$. Trouver l'équation de la surface et le volume compris entre l'origine et le plan qui a pour équation $x + y = a$. (TODHUNTER.)

×**577**. On prolonge les hauteurs AA', BB', CC', DD' d'un tétraèdre, à partir des sommets, de quantités AA'', BB'', CC'', DD'' inversement proportionnelles à ces hauteurs. Démontrer que les tétraèdres ABCD, A''B''C''D'' ont même centre de gravité. (NEUBERG.)

×**578**. Soient α, β, γ, δ les angles sous lequels on voit les diagonales d'un cube, l'œil étant placé en un point quelconque de la sphère inscrite au cube. Démontrer que $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}^2\delta = 8$.

(Colonel CLARKE.)

579. On donne un triangle ABC et un point fixe O. 1° Si les droites AM, BM, CM, qui joignent les sommets A, B, C à un point quelconque M rencontrent BO, CO, AO respectivement en μ_1, μ_2, μ_3, et CO, AO, BO en ν_1, ν_2, ν_3, démontrer que les droites $C\mu_1$, $A\mu_2$, $C\mu_3$ concourent en un point M', et les droites $B\nu_1$, $C\nu_2$, $A\nu_3$ en un point M''.

2° Lorsque M décrit une droite, M' et M'' décrivent des coniques. Les points M' et M'' parcourent, en général, des courbes du même ordre.

(CL. SERVAIS.)

Il est intéressant de rapprocher la transformation de M. Servais, de celle par points brocardiens (LEMOINE, *Congrès de Grenoble* et *Supplément de Mathesis*, t. VI; DE LONGCHAMPS, J. M. S., 1886; VIGARIÉ, J. M. S., 1887).

SUR LA RECTIFICATION DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES.

par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur au Lycée Charlemagne.

(*Suite*, voir p. 127-128.)

3. CISSOÏDE. Cette courbe, comme on le sait, est rectifiable par les fonctions élémentaires. Elle a pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho = a\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

On trouve aisément, en posant $\sqrt{3}\cos\omega = t^{-1}$,

$$s = a\int \frac{\sin\omega}{\cos^2\omega}\sqrt{1+3\cos^2\omega}\,d\omega = a\sqrt{3}\int\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt,$$

Digitized by Google

ou

$$\frac{s}{a\sqrt{3}}=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}+\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}+\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$$

$$=\sqrt{1+t^2}-l\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)+C^{te},$$

c'est-à-dire, explicitement,

$$\frac{s}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{1+3\cos^2\omega}}{\cos\omega}-l\left\{\sqrt{3}\cos\omega+\sqrt{1+3\cos^2\omega}\right\}+C^{te}.$$

Dans cette formule, l désigne un logarithme nepérien. En posant

$$\sqrt{3}\cos\omega+\sqrt{1+3\cos^2\omega}=\theta,$$

on obtient la formule suivante :

$$\frac{s}{a}=3\frac{\theta^2+1}{\theta^2-1}-\sqrt{3}\,l\theta,$$

qui semble donner l'arc de cissoïde, sous la forme la plus simple.

4. Kreuzcurve générale. On appelle ainsi la courbe ayant pour équation

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1, \quad \text{ou} \quad \rho^2=\frac{a^2}{\cos^2\omega}+\frac{b^2}{\sin^2\omega}.$$

De la dernière, on tire

$$s=\int\sqrt{\frac{b^4\cos^6\omega+a^4\sin^6\omega}{\sin^4\omega\,(a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega)}}\,\frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

et, en posant $\operatorname{tang}\omega=t$,

$$s=\int\sqrt{\frac{a^4t^6+b^4}{t^4\,(a^2t^2+b^2)}}\,dt.$$

Dans le cas particulier où $a=b$, cette intégrale se simplifie et la rectification de la courbe, qu'on peut nommer, dans ce cas, *Kreuzcurve normale*(*), dépend seulement des intégrales elliptiques.

(*) Cette courbe se rencontre dans plusieurs problèmes. Voyez notre *Cours de Géométrie analytique*, p. 260, et notre mémoire *Sur les Courbes parallèles* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1886, p. 202). Voyez aussi la note de M. Neuberg, publiée dans ce même recueil (1887, p. 62). M. Schoute s'est occupé de la Kreuzcurve générale dans un mémoire *Sur les Quartiques à trois nœuds inflexionnels* (Archives de Grunert et Hoppe, 1885, p. 124).

Digitized by Google

Mais on le voit mieux encore, en dirigeant le calcul comme nous allons le montrer.

5. KREUZKURVE NORMALE. Nous indiquerons d'abord une génération remarquable de cette courbe.

Ayant pris deux axes rectangulaires Ox et Oy, considérons une droite Δ ($y = h$) parallèle à Ox; soit M un point mobile sur Δ. Si l'on mène la bissectrice de $MO\omega$ et si l'on prend sur cette bissectrice $OI = OM$, le lieu de I est une Kreuzcurve. De cette construction résulte l'équation de la courbe $\rho \sin 2\omega = h$, d'où l'on déduit sans peine

$$s = h \int \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 2\omega}}{\sin^2 2\omega} d\omega. \tag{1}$$

Cette formule prouve que *la Kreuzcurve est rectifiable par un arc de l'hyperbole*, ayant pour équation $x^2 - 3y^2 = h^2$, ou

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{\sin 2\omega}, \quad \frac{y\sqrt{3}}{h} = \frac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega}. \tag{2}$$

Au point M (ρ, ω) de la Kreuzcurve, correspond un point M′ de l'hyperbole déterminé par les formules (2). La différentielle $d\sigma$ de l'arc de cette hyperbole, au point M′, est donnée par la formule

$$d\sigma = \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3\cos^2 2\omega + 1}}{\sin^2 2\omega} d\omega. \tag{3}$$

La comparaison des formules (1) et (3) prouve que si l'on considère deux points M_1, M_2 sur la Kreuzcurve, et les points correspondants M'_1, M'_2 sur l'hyperbole H, on a

$$\text{arc } M_1M_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{arc } M'_1M'_2.$$

6. *Généralisation de la transformation précédente.* De même que, de la droite Δ, on a déduit la Kreuzcurve normale, de toute courbe γ ayant pour équation $\rho = f(\omega)$, on peut déduire une courbe Γ, représentée par la relation $R = f(p\Omega)$, et dont l'arc S s'exprimera par une intégrale analogue à celle qui donne l'arc s de la première. On trouve, en effet,

$$s = \int \sqrt{[f(\omega)]^2 + [f'(\omega)]^2}\, d\omega,$$

$$S = \int \sqrt{[f(p\Omega)]^2 + [pf'(p\Omega)]^2}\, d\Omega = \int \sqrt{\left[\frac{f(\omega)}{p}\right]^2 + [f'(\omega)]^2}\, d\omega. \tag{5}$$

En général, si s est une intégrale algébrique, une transcendante élémentaire, ou une intégrale elliptique, S sera une intégrale elliptique.

Digitized by Google

7. APPLICATION A LA DROITE. *Toutes les courbes* Γ *qu'on peut déduire d'une droite* Δ, *par la transformation précédente, sont rectifiables par les intégrales elliptiques.* Les équations de Δ et de Γ sont respectivement

$$\rho = \frac{1}{a\cos\omega + b\sin\omega}, \quad R = \frac{1}{a\cos p\Omega + b\sin p\Omega},$$

De la dernière relation, on déduit

$$S = \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2p^2)\cos^2 p\Omega + (a^2p^2 + b^2)\sin^2 p\Omega - 2ab(p^2-1)\sin p\Omega\cos p\Omega}}{(a\cos p\Omega + b\sin p\Omega)^2}\, d\Omega$$

ou, en posant

$$A = a^2 + b^2, \quad B = 2ab, \quad C = b^2 - a^2, \quad 2p\Omega = t,$$

$$S = \frac{1}{p\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{A(p^2+1) - (p^2-1)\,B\sin t + (p^2-1)\,C\cos t}}{A + B\sin t - C\cos t}\, dt.$$

Il est facile de reconnaître, dans cette expression, un cas particulier des intégrales elliptiques. En effet, si l'on y fait $B\sin t - C\cos t = \theta$, on trouve

$$S = \frac{1}{p\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{A(p^2+1) - (p^2-1)\,\theta}}{(A+\theta)\sqrt{A^2 - \theta^2}}\, d\theta.$$

C'est bien là une intégrale elliptique, dans le cas particulier où le radical carré ne porte que sur un polynôme du troisième degré.

Il est remarquable que cette formule ne renferme que le coefficient A ; on peut déduire de cette observation, relativement aux courbes qui correspondent aux droites tangentes à un cercle fixe, ayant son centre à l'origine, quelques propriétés intéressantes que nous voulons seulement signaler, sans nous y arrêter.

8. APPLICATION A LA CIRCONFÉRENCE. LA ROSACE(*). Imaginons un cercle γ, ayant pour équation $\rho = a\sin\omega$; l'axe polaire est une tangente Ox, l'origine un point de la courbe, a son diamètre. Soit M un point mobile sur γ ; si nous prenons, sur la bissectrice de ω une longueur OI égale à OM, le lieu de I est une rosace ayant pour équation $R = a\sin 2\Omega$. On trouve

$$S = a\int \sqrt{4 - 3\sin^2 2\Omega}\, d\Omega = a\int \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin^2\omega}\, d\omega.$$

L'arc S de la rosace est donc égal à celui d'une ellipse dont le demi-grand axe est égal à a, son excentricité étant $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; par suite, le petit axe est $\frac{1}{2}a$. On trouve

---

(*) Sur cette courbe, voyez la *Géométrie analytique* de BRIOT et BOUQUET, p. 28, et notre *Cours de Géométrie analytique*, p. 598.

Digitized by Google

aisément que le périmètre total de cette ellipse est égal à celui de deux des feuilles de la rosace.

9. AUTRE APPLICATION. Un troisième exemple nous permettra de montrer avec quelle facilité la méthode précédente permet de trouver des courbes rectifiables au moyen de fonctions déterminées, en disposant de certaines constantes qui y entrent. Considérons, par exemple, les courbes γ et Γ définies par les équations

$$(\gamma) \qquad \rho = \cos^{\alpha}\omega \sin^{\beta}\omega, \qquad (\Gamma) \qquad R = \cos^{\alpha} p\Omega \sin^{\beta} p\Omega,$$

dans lesquelles α et β sont supposés entiers. Ces courbes sont rectifiables par les transcendantes elliptiques et même, dans un cas très général que nous allons signaler, par les transcendantes ordinaires. En effet, le calcul donne d'abord

$$s = \int \sqrt{\alpha^2 \sin^4\omega + (1 - 2\alpha\beta)\sin^2\omega\cos^2\omega + \beta^2\cos^4\omega}\,\cos^{\alpha-1}\omega\sin^{\beta-1}\omega\,d\omega.$$

En posant $\tang\omega = \theta$, il vient

$$s = \int \sqrt{\alpha^2\theta^4 + (1 - 2\alpha\beta)\theta^2 + \beta^2}\,\frac{\theta^{\beta-1}}{(1+\theta^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}+1}}\,d\theta.$$

Si α et β sont tous deux pairs, cette expression se réduit aux intégrales élémentaires, en faisant $\theta^2 = t$. Si α et β sont tous deux impairs, s est donné par une intégrale elliptique. Si α est impair et β pair, posons, dans la première expression de s, $\sin^2\omega = \tau$. Nous trouverons

$$s = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{\alpha^2\tau^2 + (1 - 2\alpha\beta)\tau(1-\tau) + \beta^2(1-\tau)^2}{1-\tau}}\,(1-\tau)^{\frac{\alpha-1}{2}}\tau^{\frac{\beta}{2}}\,d\tau;$$

c'est-à-dire une intégrale elliptique. Un calcul semblable, dans le cas où α est pair et β impair, conduit à la même conclusion; d'ailleurs, en changeant ω en $\frac{1}{2}\pi - \omega_1$, on passe, à volonté, d'un cas à l'autre.

Le *folium double*, $\rho = a\cos\omega\sin^2\omega$ (*) appartient à la famille des courbes que nous venons d'étudier. Cette courbe est rectifiable par les transcendantes elliptiques, ainsi que ses transformées, comme nous allons le voir.

D'après la formule (5) du n° 6, on trouve, en effet, pour la courbe Γ, dans le cas général,

$$S = \int \sqrt{\alpha^2\sin^4\omega + \left(\frac{1}{p^2} - 2\alpha\beta\right)\sin^2\omega\cos^2\omega + \beta^2\cos^4\omega}\,\cos^{\alpha-1}\omega\sin^{\beta-1}\omega\,d\omega.$$

En comparant s et S, on voit que la forme algébrique des deux intégrales est la même; le coefficient $1 - 2\alpha\beta$, sous le radical de s, est seul modifié; il est remplacé par $\frac{1}{p^2} - 2\alpha\beta$.

(*) *Journal de mathématiques spéciales*, 1886, p. 251.

Digitized by Google

Grâce à ce changement, il existe un cas où S peut s'exprimer par les transcendantes élémentaires sans qu'il en soit de même pour s. C'est celui où la quantité sous le radical est un carré parfait. Pour cela, il faut que

$$\frac{1}{p^2} = 4\alpha\beta.$$

Ainsi, toutes les fois que le produit des deux nombres entiers α, β sera un carré parfait, l'on pourra, par une transformation convenable des courbes γ, obtenir des courbes Γ, rectifiables par les transcendantes ordinaires.

Par exemple, si l'on suppose $2p = \alpha^{-1} = \beta^{-1}$, on obtient la courbe

$$\rho = \left(\cos\frac{\Omega}{2\alpha}\sin\frac{\Omega}{2\alpha}\right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\Omega}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

Pour $\alpha = 2$, on a la *cardioïde*, qui est rectifiable, comme l'on sait; la formule précédente généralise cette proposition et l'on peut dire que α ***désignant un nombre entier, les courbes représentées par l'équation***

$$\rho = a\left(\sin\frac{\Omega}{\alpha}\right)^{\alpha}. \tag{c}$$

sont rectifiables par les transcendantes ordinaires.

Cette proposition, probablement très connue, et dans tous les cas bien facile à vérifier, découle naturellement de notre analyse; elle mérite pourtant d'être signalée et d'être rapprochée d'une propriété du même genre, relative à la lemniscate.

On sait(*) que la longueur de la demi-boucle de la lemniscate, courbe correspondant à l'équation $\rho^2 = a^2 \sin 2\omega$, dépend de la transcendante numérique $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$; cette remarque a été généralisée par M. Serret, pour les courbes $\rho^m = a^m \sin m\omega$, m désignant un nombre entier. Si, dans cette formule, on change m en $(1 : m)$, on obtient les courbes (c) considérées plus haut.

Le problème de la rectification se trouve donc résolu, dans les limites possibles, pour toutes les courbes dont l'équation est $\rho^p = a^p \sin p\omega$, p étant un entier positif ou l'inverse d'un nombre entier positif.

QUESTIONS D'EXAMEN.

326. Construire un triangle ABC, connaissant la bissectrice AD de l'angle A et les sommes $AB + BD = m$, $AC + CD = n$.

Le calcul des côtés AB, AC est facile. La solution suivante est très élégante (Voir *Journal de Vuibert*, 1886, p. 146). Prolongeons BC de $BB' = BA$, $CC' = CA$.

(*) BERTRAND, *calcul intégral*, p. 369.

Digitized by Google

La circonférence AB'C' a évidemment son centre sur la droite AD au centre du cercle exinscrit à ABC. Donc, après avoir pris sur une droite indéfinie les segments $DB' = m$, $DC' = n$, il faut décrire une circonférence passant par B' et C', et touchant la circonférence décrite de D comme centre avec la bissectrice donnée pour rayon.

327. Construire un triangle ABC, connaissant les sommes ou différences $AB \pm BD = m$, $AC \pm CD = n$, et l'un des angles ADB ou CAB (AD est la bissectrice de l'angle CAB).

328. Démontrer que la fraction décimale équivalente à la somme

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

est périodique mixte.

329. On considère toutes les paraboles qui ont même sommet O et passent par un point fixe A. Trouver les lieux des points suivants : 1° intersection B des tangentes en O et A ; 2° intersection C de la tangente en A avec l'axe ; 3° foyer F ; 4° pied N de la normale en A ; 5° point de rencontre N' de la tangente en O avec la normale en A. Trouver l'enveloppe de la directrice. (Comparer *Journal de Vuibert*, 1886, p. 155.)

Le pied P de l'ordonnée de A décrit une circonférence (P) : 1° Comme OB est parallèle à AP et égale à $\frac{1}{2}$ AP, B décrit une circonférence ; 2° comme OC = OP, C décrit la circonférence symétrique de (P) par rapport à O. 3° La tangente en A au cercle (P) rencontrant les droites OP, OB en Q et Q', on a : $\overline{AP}^2 = 2px = OP.PQ$, d'où $p = \frac{1}{2}$ PQ. Or $OF = \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}$ PQ ; donc F décrit une cissoïde. 4° N est au milieu de PQ, et si Q'' est le point de rencontre de OP avec la droite symétrique de QQ' par rapport O, on a $ON = \frac{1}{2}$ PQ'. Le lieu de N est donc une courbe *cissoïdale*. 5° Soit P' le point de rencontre de OB avec le cercle (P). AP' étant parallèle à PQ, les droites AP, AN, AQ, AP' forment un faisceau harmonique, qui détermine des segments égaux P'Q' = Q'N' sur une parallèle au rayon AP. Le lieu de N' est donc encore une courbe cissoïdale.

La cissoïde, lieu de F, est la podaire du sommet d'une parabole π ; la perpendiculaire menée par F sur OF est donc tangente à π. La directrice de la parabole variable enveloppe une parabole symétrique de π par rapport à O. (J. N.)

330. Trouver la valeur du chiffre x, tel que le carré du nombre $x\,23$ soit égal à $x\,5\,x\,29$.

Digitized by Google

EXERCICE DE CALCUL SYMBOLIQUE(*);

par M. Ernest Cesàro.

Proposons-nous de résoudre le système d'équations

$$\sum_{r=1}^{r=n} C_{n+i,r}\, x_r = u_{n+i}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Si l'on ajoute $x_0 = 0$ aux premiers membres, et si l'on étend la série des quantités x de manière que l'on ait $x_i = 0$, pour $i > n$, les équations proposées prennent la forme symbolique

$$(1 + x)^p = u^p,$$

et rien ne nous empêche de supposer que cette relation soit vraie pour toutes les valeurs entières de p, de sorte que x_i représente la $i^{ème}$ différence de u_0. Or, on sait que

$$\Delta^i (u_p) = \frac{\Delta^i (u_q)}{[1 + \Delta (u_q)]^{q-p}}.$$

En particulier, si l'on fait $p = 0$, $q = n + 1$, et que l'on désigne tout simplement par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ les différences successives de u_{n+1}, on a

$$x_i = \frac{\Delta^i}{(1 + \Delta)^{n+1}}.$$

En outre, on peut faire $\Delta_i = 0$, pour $i > n$, ce qui revient à dire que l'on a, comme on l'a supposé en commençant, $x_i = 0$, pour $i > n$. Il en résulte

$$x_i = \Delta_i - C_{n+1,1}\, \Delta_{i+1} + C_{n+2,2}\, \Delta_{i+2} - \cdots \pm C_{2n-i,n-i}\, \Delta_n.$$

En particulier, $x_n = \Delta_n$. La formule qui précède fait donc connaître les $n - 1$ premières inconnues en fonction de la dernière. Par substitution dans l'une des équations proposées, on détermine d'abord x_n, puis les autres inconnues. Supposons, par exemple, que les seconds membres soient tous égaux à l'unité, et, par suite, que l'on ait $\Delta_i = 0$, pour $i < n$. Alors

$$x_i = (-1)^{n-i}\, C_{2n-i,n-i}\, x_n.$$

(*) Cet article contient la solution de la *question* 499 (*Mathesis*, t. V, p. 280).

Digitized by Google

Puis, par substitution dans la dernière des équations proposées,

$$\frac{1}{x_n}\sum_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i C_{n+i,i}\,C_{2n,n-i} = (-1)_{n-1}\,C_{2n,n}.$$

Par conséquent, le système

$$\begin{cases} C_{n+1,1}\,x_1 + C_{n+1,2}\,x_2 + \cdots + C_{n+1,n}\,x_n = 1 \\ C_{n+2,1}\,x_1 + C_{n+2,2}\,x_2 + \cdots + C_{n+2,n}\,x_n = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{2n,1}\,x_1 + C_{2n,2}\,x_2 + \cdots + C_{2n,n}\,x_n = 1, \end{cases}$$

qui fait l'objet de la *question* 499, est résolu par la formule

$$x_i = (-1)^{i-1}\frac{C_{n,i}}{C_{2n,i}}.$$

M. Bordt a résolu la même question au moyen des déterminants.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

8. Théorème d'arithmétique. ***Un nombre est ou n'est pas la somme de deux ou plusieurs nombres entiers consécutifs, suivant qu'il n'est pas ou qu'il est une puissance exacte de*** 2. Le théorème est évident pour tout nombre impair $2m+1$, somme de m et de $m+1$. Pour un nombre pair N, posons

$$N = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+p) = \tfrac{1}{2}(p+1)(2n+p),$$

on aura

$$2N = (p+1)(2n+p), \quad n = \frac{N}{p+1} - \frac{p}{2}.$$

Évidemment $p+1$ ou $2n+p$ est impair; donc si N est une puissance de 2, la décomposition est impossible. Si N contient des facteurs premiers impairs, soit a le plus petit, ou le seul si $N = 2^k.a$. Posons $p+1 = a$; alors

$$p = a-1, \quad n = \frac{N}{a} - \frac{a-1}{2}.$$

Si N a un second facteur $b > a$, n est positif et la décomposition indiquée peut se faire. Si $N = 2^k.a$, n peut être négatif; alors la suite

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \ldots, \quad n+p$$

Digitized by Google

dont la somme est N, contient certainement des termes positifs; ils sont plus nombreux que les termes négatifs. En supprimant dans cette suite les termes affectés à la fois du signe — et du signe +, la décomposition est effectuée. Ainsi, pour $N = 18$, on trouve $a = 9$, $n = -2$, $p = 8$, puis

$$18 = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 3 + 4 + 5 + 6.$$

On n'aura jamais d'ailleurs $n + p = N$, de manière à rendre le procédé illusoire, car cela suppose la relation

$$\frac{N}{a} - \frac{a-1}{2} + a - 1 = N,$$

ou encore

$$\frac{N}{a} - \frac{1}{2} = a\left(\frac{N}{a} - \frac{1}{2}\right),$$

c'est-à-dire $a = 1$, $N = 2^4$, cas exclu (D'après H. Christensen, *Journal danois de mathématiques*, 1883, (5), I, p. 29-31). Ce théorème est la généralisation de la question 524, posée tome VI, p. 144, résolue même tome, p. 277.

9. Identités algébriques. 1° L'identité

$$(x^2 - y^2 + z^2 - t^2)^2 + (2xt + 2yz)^2 + (2xy - 2zt)^2 = (x^2 - y^2 - z^2 + t^2)^2 + (2xz - 2yt)^2 + (2xy + 2zt)^2$$

donne une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2.$$

Si l'on y fait $t = 0$, on obtient l'égalité

$$(x^2 - y^2 + z^2)^2 + (2yz)^2 = (x^2 - y^2 - z^2)^2 + (2xz)^2, \qquad (1)$$

qui résout l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2.$$

En remplaçant, dans (1), y par $y\sqrt{-1}$, on retrouve l'identité de M. Catalan

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 + y^2 - z^2)^2 + (2xz)^2 + (2yz)^2.$$

2° On a, identiquement,

$$(xz - yt + u)^2 + (xu - yv - z)^2 + (xt + yz - v)^2 + (xv + yu + t)^2 = (xz - yt - u)^2 + (xu - yv + z)^2 + (xt + yz + v)^2 + (xv + yu - t)^2.$$

(Boïje af Gennäs).

Digitized by Google

10. ***Limite supérieure des racines positives d'une équation algébrique,*** *par* M. E. WASTEELS, *élève à l'École normale des Sciences de Gand.* Divisons le premier membre d'une équation algébrique par la plus haute puissance de l'inconnue et soient $\varphi(x)$ l'ensemble des termes positifs, $-\psi(x)$ l'ensemble des termes négatifs du quotient. L'équation pourra s'écrire

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$

ou

$$\varphi(x) = A + \frac{A_\alpha}{x^\alpha} + \frac{A_\beta}{x^\beta} + \text{etc.}, \quad \psi(x) = \frac{A_\mu}{x^\mu} + \frac{A_\nu}{x^\nu} + \text{etc.}$$

Les polynômes $\varphi(x)$, $\psi(x)$ décroîtront, quand x croîtra.

Soit L une limite supérieure des racines positives de sorte que $\varphi(L) > \psi(L) > 0$, et soit L' une quantité inférieure à L, telle que l'on ait aussi $\varphi(L) - \psi(L') > 0$. Je dis que L' est une limite supérieure des racines, ou que l'on a encore

$$\varphi(x) - \psi(x) > 0,$$

si x est compris entre L' et L. En effet, on aura

$$\varphi(x) > \varphi(L), \quad \psi(x) < \psi(L') \quad \text{ou} \quad -\psi(x) > -\psi(L').$$

Donc, en ajoutant,

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(L) - \psi(L') > 0.$$

TRANSMUTATIONS D'UN TRIANGLE.

M. Laisant a fait connaître récemment deux propositions fort intéressantes sur le triangle(*). Voici l'énoncé de la première :

Sur une droite fixe OX, ***on porte trois longueurs*** OA', OB', OC' ***proportionnelles aux carrés des côtés d'un triangle*** ABC; ***puis on forme les angles*** XA'M, XB'N, XC'P ***respectivement égaux aux angles opposés dans le même triangle. Démontrer :***

1° ***Que les droites*** A'M, B'N, C'P ***concourent en un même point*** T;

2° ***Que*** A'T : B'T : C'T = $bc : ca : ab$;

3° ***Que la perpendiculaire*** TQ ***abaissée sur*** OX ***est une longueur proportionnelle au double de l'aire du triangle;***

4° ***Que*** OQ ***est proportionnelle à*** $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$;

(*) *Bourget*, J. M. E., 1885, pp 95-96; 1887, pp. 89-95 et 137.

Digitized by Google

5° *Que* OT *est proportionnelle à* $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$;

6° *Que l'angle* XOT *est égal à l'angle de Brocard.*

Dans la seconde proposition, *on prend les longueurs* OA', OB', OC' *égales aux côtés d'un triangle* ABC, *et l'on forme les angles* XA'M, XB'N, XC'P *égaux aux moitiés des angles opposés dans le même triangle.* Alors : 1° *les droites* A'M, B'N, C'P *concourent en un même point* T; 2° *les longueurs* A'T, B'T, C'T *sont égales aux distances des sommets du triangle* ABC *au centre du cercle inscrit*; 3° *la distance* TQ *de* T *à* OX *est égale au rayon du cercle inscrit;* 4° $OQ = p$; 5° $\cot XOT = \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$.

Ces théorèmes nous ont suggéré une *transmutation* d'un autre genre(*). Nos lecteurs trouveront facilement la démonstration des résultats que nous énonçons ci-dessous. Nous les invitons à chercher d'autres questions analogues; si elles présentent quelque intérêt, nous les publierons dans *Mathesis.*

On construit trois angles XOM, XON, XOP *égaux aux angles* A, B, C *d'un triangle scalène* ABC, *et l'on prend sur les droites* OM, ON, OP *les longueurs* OA', OB', OC' *égales aux côtés* a, b, c *de* ABC, *ensuite les longueurs* OA'', OB'', OC'' *égales aux hauteurs de* ABC. *Démontrer :* 1° *que les points* O, A', B', C' *sont sur une même circonférence égale à la circonférence* ABC; 2° *que les points* A'', B'', C'' *sont en ligne droite;* 3° *que les côtés du triangle* A'B'C' *sont doubles des distances entre les milieux des côtés de* ABC *et les pieds des hauteurs correspondantes;* 4° *que les droites* B'C', C'A', A'B' *font avec* XO *des angles égaux à* A, B, C *et rencontrent* OX *à des distances de* O *égales à* $\frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}, \frac{ab}{c}$; 5° *que la droite joignant* O *au centre de gravité de* A'B'C' *fait avec* OX *un angle égal au complément de l'angle de Brocard de* ABC; 6° *si l'on donne le triangle* A'B'C', *il existe trois positions correspondantes du point* O *ou trois triangles correspondants* ABC; *les trois positions de* O *sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

(J. Neuberg.)

(*) Cependant notre transmutation peut se ramener à celle de M. Laisant : il suffit de commencer celle-ci par le point T et de soumettre les points A', B', C' à une inversion, le pôle étant en T.

Digitized by Google

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Question de concours (Juin 1887).

On donne dans un plan un point fixe ω et deux axes rectangulaires Ox, Oy. Par ω, on fait passer deux droites rectangulaires, rencontrant Ox en B et D, Oy en A et C. Par A et B, on fait passer une parabole P tangente aux axes Ox, Oy en ces points; par C et D, on fait passer une parabole P′ tangente aux axes Ox, Oy en ces points. On fait tourner les droites rectangulaires AB, CD autour de ω. Chercher 1° l'équation des paraboles P et P′. 2° L'équation du lieu du point de concours des axes et des directrices. 3° L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, qui se compose de deux cercles. 4° On prouvera que la distance des foyers est constante.

Solution. 1° Soient (x_1, y_1) les coordonnées de ω. L'équation de P est de la forme

$$\{(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\sin\alpha\}^2 + \lambda xy = 0.$$

On trouve aisément $\lambda = -4\sin\alpha\cos\alpha$; d'où les équations de P et P′:

$$(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 - 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha) + (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)^2 = 0,$$

$$(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 - 2(x\sin\alpha - y\cos\alpha)(x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha) + (x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha)^2 = 0.$$

2° L'axe de la parabole représentée par $f(x,y) \equiv Ay^2 + Bxy + \cdots = 0$ a pour équation $Bf'_x + 2Af'_y = 0$; d'où, pour les axes de P et P′ :

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos 2\alpha\,(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha), \qquad (1)$$

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = -\cos 2\alpha\,(x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha). \qquad (2)$$

Les directrices passent par le point O, sommet d'un angle droit circonscrit; elles ont donc pour équations

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0, \qquad (3)$$

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0. \qquad (4)$$

Le lieu des pieds des directrices de P et P′ s'obtient en éliminant α entre (1) et (3) ou entre (2) et (4). Passons aux coordonnées polaires en posant $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, $x_1 = r\cos\beta$, $y_1 = r\sin\beta$; l'égalité (3)

Digitized by Google

donne $\alpha = \pi - \omega$, et par suite l'équation du lieu cherché est $\rho = r \cos 2\omega \cos(\omega + \beta)$.

3° et 4°. Entre les égalités (1) et (2), éliminons α. En passant aux coordonnées polaires, on trouve d'abord

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos(\omega + \alpha) &= r \cos 2\alpha \cos(\alpha - \beta), \\ \rho \sin(\omega + \alpha) &= -r \cos 2\alpha \sin(\alpha - \beta), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

d'où, par division,

$\operatorname{tg}(\omega + \alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\omega + \alpha = \pi - (\alpha - \beta)$, $2\alpha = \pi + \beta - \omega$;

l'équation du lieu cherché est donc

$$\rho = r \cos(\omega - \beta).$$

Le lieu est donc la circonférence qui a pour diamètre Oω(*).

Pour démontrer ce résultat par la géométrie, observons que les foyers F, F′ des deux paraboles sont les projections de O sur AB et CD; donc le lieu de ces points est la circonférence qui a pour diamètre Oω. Ces points sont diamétralement opposés sur cette circonférence, l'angle FωF′ étant droit; donc FF′ = Oω. Les axes de P et P′ sont rectangulaires; car les diamètres des paraboles conjugués avec AB et CD passent par O et sont, évidemment, rectangulaires. Les parallèles à ces diamètres menées par F et F′ se coupent sur la circonférence ωFOF′.

L'axe de P enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Car cet axe et la corde OF ont des vitesses angulaires qui sont égales et de signes contraires, leurs directions étant symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle YOX. Le lieu du n° 2 est une podaire de cette hypocycloïde. La tangente au sommet enveloppe également une hypocycloïde à trois rebroussements. (H. Brocard et J. Neuberg.)

(*) En faisant autrement l'élimination, par exemple, en faisant la somme des carrés des équations (5), on introduit une solution étrangère. De même, on peut faire la somme des carrés des équations (1) et (2), puis diviser ces équations l'une par l'autre. Ces combinaisons de (1) et (2) ne changent pas quand on remplace x_1, y_1 par $-x_1, -y_1$, de sorte que le résultat de l'élimination comprend aussi le cas où l'on remplace le point ω par son symétrique relativement à O. Cette explication des mots « qui se compose de deux cercles » de l'énoncé diffère de celle que M. de Longchamps vient de donner, sous forme dubitative, dans le J. M. S., p. 164.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie et applications des équipollences, par C.-A. LAISANT, député, docteur ès sciences, ancien élève de l'École polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, 1887, un vol. in-8° de XVI-300 pages, avec figures dans le texte. Prix : 7 fr. 50.

De tous les géomètres contemporains, M. Laisant est certainement celui qui s'est le plus appliqué à initier le public mathématique à l'étude des équipollences, soit dans des ouvrages destinés à l'enseignement, comme l'Exposition de la méthode des équipollences, parue en 1874, traduction du meilleur traité didactique publié jusqu'à ce jour, soit dans d'autres travaux personnels présentés à différents congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences ou publiés dans divers recueils mathématiques.

A cette liste, qui serait déjà étendue, il conviendrait d'ajouter des travaux relatifs à la méthode des quaternions, notamment une thèse de doctorat en 1877, et, en 1881, un ouvrage sur les quaternions, où cette méthode, que l'on peut, à première vue, comparer à une extension des équipollences à la géométrie de l'espace, est présentée sous une forme plus élémentaire que dans des ouvrages classiques antérieurement publiés par Hamilton (1853), par J. Hoüel (1874) et par d'autres géomètres.

C'est précisément à un des derniers congrès de l'Association française, à celui d'Alger en 1881, que nous trouvons présentées de judicieuses observations sur l'origine naturelle et géométrique du calcul des équipollences : « Le calcul des équipollences, dû principalement aux recherches faites en Italie par M. Bellavitis et que M. Laisant a puissamment contribué à faire connaître en France, a pour avantage essentiel et précieux de fournir une représentation réelle et parfaitement nette, nullement factice d'ailleurs, de la première imaginaire qu'on rencontre en algèbre. Il fournit en même temps au géomètre un instrument fécond, une géométrie analytique plus souple que l'emploi des coordonnées vulgaires, plus directement applicable à la solution des problèmes de géométrie de toute nature, qu'elle permet de dégager de la plupart des outils auxiliaires qu'exige, parfois au détriment de l'élégance, l'emploi de la méthode cartésienne. Les interprétations variées d'une même équipollence font véritablement de ce calcul une sorte de géométrie à coordonnées multiformes, chez laquelle chaque problème particulier trouvera fréquemment le système de coordonnées naturelles qui lui est propre. »

L'auteur de ces lignes, M. Laquière, concluait en exprimant le désir de voir « introduire franchement et presque dès le début le *ramun* dans l'enseignement classique, sinon de la géométrie élémentaire, du moins dans celui de la géométrie analytique et de la mécanique, de concert avec l'explication des quantités soi-disant imaginaires. »

A l'époque de cette communication, M. Laisant avait déjà entrepris le plan de l'ouvrage qu'il publie aujourd'hui. Il fit remarquer la possibilité et l'avantage de remplacer les notations primitives de Bellavitis par les signes usuels : « les signes habituels de l'algèbre, disait à ce sujet M. Darboux, ont suffi à Cauchy pour ses

Digitized by Google

travaux, dont un certain nombre ont une grande analogie avec le calcul des équipollences. »

Ce retour aux notations usuelles est ici réalisé, et le lecteur pourra se convaincre qu'il n'y a pas à en redouter de confusion.

Il serait inexact de dire que le nouveau traité est absolument indépendant du premier. Tout ce que celui-ci renfermait d'essentiel et d'important a été reproduit à peu près dans le même ordre, mais les principes eux-mêmes ont été soigneusement refondus, et l'auteur s'est appliqué à les présenter avec la plus grande clarté, afin que le lecteur ne puisse conserver le moindre doute quant à la simplicité de la méthode. Au surplus, le lecteur n'est pas abandonné à lui-même dans les débuts: on y remarquera de fréquents retours aux principes, destinés à le guider et à lui donner confiance. Plus tard, les applications choisies parmi les plus intéressantes, permettent de reconnaître la conclusion des formules et la brièveté des opérations, comparées à celles de la géométrie cartésienne dans une foule de circonstances.

La subdivision fondamentale est indiquée par le titre de l'ouvrage : 1° Théorie, deux chapitres renfermant l'exposé des règles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des droites.

2° Applications, neuf chapitres renfermant successivement les procédés généraux, divers exercices, des applications au triangle et aux polygones, l'aire des figures planes, quelques questions de géométrie supérieure, des applications à la théorie des courbes, des transformations et des applications cinématiques.

73 figures dans le texte et 115 exercices accompagnent les divers chapitres du traité.

Parmi les applications, celles qui sont relatives à la récente géométrie du triangle auraient pu donner le sujet d'un volumineux travail. L'auteur s'est contenté avec raison d'en tracer le plan, mais il est ici permis de souhaiter qu'un géomètre les reprenne avec l'intention d'en exposer une étude systématique. Une pareille étude sera très utile, parce qu'elle fera ressortir des propriétés nouvelles.

Signalons aussi diverses questions tirées de *Mathesis* (nos 260 et 325) et résolues (pp 238 et 240) pour la première fois. Nous rencontrons encore, p. 155, le théorème d'où a été conclue la question 534 de *Mathesis*, résolue t. VII, p. 53.

Nous pourrions appeler l'attention du lecteur sur d'autres remarques intéressantes, mais nous croyons devoir lui laisser ce soin; il nous suffira sans doute d'avoir essayé de mettre en relief les qualités d'un livre que tout géomètre devra consulter pour acquérir rapidement une certaine habileté dans l'emploi de l'ingénieuse méthode de Bellavitis. (H. B.).

Résumé de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions à l'usage des candidats aux Écoles polytechnique, normale, centrale, des ponts et chaussées, des mines, forestière et navale, par A. Rémond, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. Deuxième édition Paris, Nony, 1887. Un vol.-in-8° de 151 pages. Prix : 4 francs.

Nouvelle édition d'un résumé lithographié du cours de M. Rémond qui a obtenu un grand succès dans les lycées de Paris. Il contient les formules, les théorèmes

Digitized by Google

et les problèmes d'un cours complet de Géométrie analytique, sans démonstration, mais classées systématiquement. Voici l'indication des matières traitées. GÉOMÉTRIE PLANE. I. 1. Coordonnées et invariants. 2. Ligne droite; faisceaux. 3. Cercle. 4. Lieux géométriques. II. 1. Tangentes (faisceaux, équation tangentielle, courbes orthogonales), podaires. 2. Normale. 3. Points multiples (hessienne; étude d'une courbe autour de l'origine). 4. Asymptotes. 5. Construction des courbes. 6. Centre, diamètres, polaires. 7. Enveloppes. III. *Coniques en général*. 1. Classification par diverses méthodes. 2-7. Centre, diamètres, axes, tangente et normale, pôle et polaire, foyers et directrices. 8. Théorèmes de Pascal, Brianchon, Desargues, Carnot, Chasles, Dandelin; homothétie, similitude. 9. Intersection de deux coniques (discussion). 10. Détermination des coniques. IV. 1. Ellipse. 2. Hyperbole. 3. Parabole. Construction des racines d'une équation du troisième et du quatrième degré. V. *Coordonnées polaires*. 1. Droite, cercle, coniques 2. Tangentes, inflexion, branches infinies.

Géométrie solide. I. 1-4. Coordonnées, invariants; plan; droite; sphère. II. 1. Tangente, plan tangent. 2. Cylindres, cônes, conoïdes, surfaces de révolution, enveloppes. III. *Surfaces du second ordre*. 1. Classification. 2. Centre, cône asymptôte. 3. Plans diamétraux. 4. Plans principaux. 5. Diamètres, axes, sommets. 6. Pôle et plan polaire. Sections planes, circulaires, rectilignes. 8. Détermination des quadriques.

Des tableaux récapitulatifs terminent les chapitres difficiles (Intersection des coniques, détermination des coniques, des quadriques, etc.).

Tablas de logaritmos, cologaritmos y antilogaritmos de los numeros naturales y trigonométricos con los logaritmos de Gauss y de Mendoza por el Doctor D. LUIS GONZAGA GASCO, catedrático de Matemáticas por oposition. Segunda parte. Valencia. Imprenta de Nicasio Rius. 1885. Un volume in-18 de XIII-84 pages et cinq tables, chacune d'une double page.

Sommaire. 1. Notions fondamentales sur les lignes trigonométriques et leurs logarithmes 2. Logarithmes trigonométriques. 3. Cologarithmes. 4. Antilogarithmes. 5. Logarithmes de Mendoza (Nombres au moyen desquels on obtient le logarithme de $\sin^2 \frac{1}{2} x$, $\cos^2 \frac{1}{2} x$, connaissant x. 6. Résolution des triangles rectilignes. 7. Résolution des triangles sphériques. 8. Applications arithmétiques (sommes, différences, produit et quotient de sommes par des différences, puissances et racines de sommes et de différences). 9. Applications algébriques (équations quadratiques, binômes, trinômes). 10. Applications géométriques (aires et volumes). *Tables* à quatre décimales, de minute en minute, grâce au système d'interpolation employé. I. Sinus et cosinus. II. Tangentes et cotangentes. III. Sécantes et cosécantes. IV. Logarithmes de $\sin^2 \frac{1}{2} x$. V. Logarithmes de $\cos^2 \frac{1}{2} x$. Tout chiffre forcé est imprimé en caractère gras, ce qui permet d'obtenir une approximation plus grande, comme l'on sait. L'auteur emploie pour *sinus* l'abréviation *sn*, ce qui n'est pas permis, parce que *sn*, dans la théorie des fonctions elliptiques, est employé pour *sinam*, c'est-à-dire *sinus amplitude* (Voir le sommaire de la première partie des Tables de M. Gasco, *Mathesis*, V, pp. 252-253).

Digitized by Google

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES QUADRATIQUES SPÉCIALES;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

(Voir *Mathesis*, t. VII, 110-114, 129-134.)

I. **1.** *Semi-inversion trilinéaire.* Considérons les coniques Σ passant par les trois points D, B, E et tangentes en B à la droite fixe BC. Prenons pour triangle de référence le triangle BAC, BA étant la droite conjuguée harmonique de BC par rapport à BD et BE. On suppose C et A situés sur DE.

L'équation générale de ces coniques est

$$a\alpha^2 + c\gamma^2 + 2\alpha\beta = 0,$$

le rapport $k = (c : a)$ étant constant. Les polaires du point P $(\alpha', \beta', \gamma')$ par rapport à deux coniques du système auront pour équations

$$a\alpha\alpha' + c\gamma\gamma' + \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0, \quad a'\alpha\alpha' + c'\gamma\gamma' + \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0.$$

Les coordonnées α'', β'', γ'' du point d'intersection P' de ces polaires seront données par les relations :

$$\frac{\alpha''}{\frac{c' - c}{a - a'}\alpha'\gamma'} = \frac{\beta''}{\frac{c - c'}{a - a'}\gamma'\beta'} = \frac{\gamma''}{\alpha'^2}$$

ou, puisque $k = (c : a) = (c' : a') = [(c - c') : (a - a')]$,

$$\frac{\alpha''}{-k\alpha'\gamma'} = \frac{\beta''}{k\gamma'\beta'} = \frac{\gamma''}{\alpha'^2}. \qquad (1)$$

Ce point étant le même pour toutes les coniques Σ, est le correspondant du point $(\alpha', \beta', \gamma')$ dans la transformation birationnelle quadratique définie par les équations (1). On verrait, comme dans le cas général, que la transformée birationnelle quadratique d'une droite est une conique, lieu des pôles de cette droite par rapport aux coniques définies plus haut.

2. *Cas particulier de cette transformation.* Menons la droite BP' qui rencontre CP au point P_1; P_1 est le correspondant de P' dans la transformation homologique harmonique, dont B est le centre et AC l'axe d'homologie. Le segment PP_1 divise harmoniquement le segment de CP,

Digitized by Google

compris entre les deux droites BD et BE. Donc la loi de correspondance entre les deux points P, P_1 peut s'exprimer comme il suit : On joint le point P à un point fixe C; la droite CP coupe deux droites fixes en deux points K et H; le correspondant de P en est le conjugué harmonique par rapport aux deux points K et H.

3. *Cas où les points* D, E *sont imaginaires conjugués.* Si D et E sont imaginaires conjugués, BD et BE sont des droites imaginaires conjuguées. Nous pouvons supposer que ces deux droites sont les rayons doubles d'un faisceau en involution dans lequel les rayons correspondants sont à angle droit. Donc, dans ce cas, le correspondant P_1 du point P, se trouve à l'intersection de CP avec la perpendiculaire menée au point B sur le rayon BP.

4. *Cas où l'une des droites* BD, BE *est à l'infini.* Dans la transformation du n° 2, nous pouvons supposer une des droites à l'infini; alors, deux points correspondants sont en ligne droite avec un point fixe et leur distance est divisée en deux parties égales par une droite fixe. Dans ce cas, à une droite correspond une demi-hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à la droite fixe et à la droite donnée.

5. *Propriété de l'hyperbole.* Par un point A de l'hyperbole, menons des parallèles aux asymptotes; et par un point quelconque B de la même branche, deux droites rencontrant les asymptotes en des points C, D, et C', D', tels que $BC = CD$ et $BC' = C'D'$; ces droites rencontrent de nouveau la courbe en deux points fixes A', A''. La droite qui joint ces deux points est conjuguée au diamètre passant par A, et sa longueur est égale à $\frac{3}{2}b'$, b' étant le demi diamètre conjugué de celui qui passe par A. L'enveloppe de cette droite est une hyperbole homothétique à la première, le rapport d'homothétie étant égal à $1\frac{1}{4}$.

6. *Problème.* Si on donne trois points A, B, C, d'une même branche d'hyperbole ainsi que la direction des asymptotes, on peut facilement construire cette branche, ainsi que le centre de la courbe. On détermine les points A' et A'', on joint le point A au point milieu α de A'A'', par une droite sur laquelle on prend du côté du point A un point O tel que $OA = 4A\alpha$. Le point O ainsi déterminé est le centre de la courbe.

7. *Propriété de la strophoïde (droite ou oblique).* Cette courbe jouit de la propriété de se transformer en elle-même par la transformation du n° 4. Appelons M et M' deux points correspondants, O le sommet, O' le point double, O'μ l'axe, A et B les points de rencontre de la tangente en

Digitized by Google

M avec les droites $O'\mu$ et OO', B' le symétrique de B par rapport au point O'. *La conique passant par les quatre points* O, A, B', M' *et tangente en* M' *à la strophoïde, est une demi-hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles à* $O'\mu$, *et à la tangente au point* M.

8. Théorème. *La transformation générale ou de première espèce (inversion trilinéaire), est équivalente à deux transformations de deuxième espèce (ou semi-inversions trilinéaires) convenablement choisies.* Soient, en effet, les deux points P et P' correspondants dans la transformation de première espèce. Nous savons que BP et BP' sont deux rayons homologues d'une involution dont les rayons doubles sont BD et BD_1. Appelons P_1 le point d'intersection de BP' avec AP. Ce point est le correspondant de P dans la transformation de deuxième espèce définie par le pôle A et le couple de droites BD, BD_1. De même, P' est le correspondant de P_1 dans la transformation de seconde espèce définie par le pôle B et le couple de droites AD et AD_1; donc, etc.

II. **1.** *Quasi-inversion linéaire.* Considérons les coniques Σ tangentes en B à la droite BC, ayant même cercle osculateur en B, et ayant pour corde de courbure BD. L'équation générale de ces coniques est :

$$c\gamma^2 + 2h\alpha\beta + 2g\alpha\gamma = 0,$$

g seul variant d'une conique à l'autre. Les polaires d'un point $P(\alpha', \beta', \gamma')$ par rapport à deux de ces coniques ont pour équations

$$c\gamma\gamma' + h(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + g(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) = 0,$$
$$c\gamma\gamma' + h(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + g'(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) = 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection P' sont données par

$$\frac{\alpha''}{h\alpha'^2} = \frac{\beta''}{c\gamma'^2 - h\alpha'\beta'} = \frac{\gamma''}{-h\alpha'\gamma'}. \qquad (1)$$

Ce point étant le même pour toutes les coniques Σ, est le correspondant de $(\alpha', \beta', \gamma')$ dans la transformation birationnelle quadratique définie par les équations (1).

2. *Cas particulier.* La droite CP' rencontre BP au point P_1 qui est le correspondant de P' dans la transformation homologique harmonique dont C est le centre et BD l'axe d'homologie. Voyons comment on peut définir la correspondance entre les deux points P et P_1. Un point P de la droite BP, a pour correspondant un point P_1 de cette droite; comme la transformation est réversible, les deux points P et P_1 décrivent sur BP une involution, dont B est un point double. Le lieu de ces points doubles est

Digitized by Google

une conique passant par B. Donc deux points correspondants P, P_1 sont en ligne droite avec un point fixe B, et divisent harmoniquement la corde interceptée sur la droite BP par une conique passant par B.

3. *Résumé.* On peut, d'après ce qui précède, interpréter géométriquement la transformation birationnelle quadratique de la manière suivante :

Étant donnés une conique S et un point fixe P, le point correspondant d'un point quelconque M est le conjugué harmonique de ce point par rapport aux points d'intersection de la droite PM et de la conique S (transformation de M. Hirst). Si la conique se décompose en deux droites réelles ou imaginaires conjuguées, on a la transformation de deuxième espèce. Si le point P est sur la conique, on a la transformation de troisième espèce.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 142.

(Voir *Mathesis*, t. II, p. 120 et t. VII, p. 118.)

Soit D *un point fixe du plan d'un triangle* ABC. *On décrit trois circonférences quelconques passant respectivement par* B *et* C, C *et* A, A *et* B, *et ayant pour centre radical le point* D. *Démontrer que le centre radical des circonférences symétriques des précédentes par rapport aux côtés* AB, BC, CA *du triangle décrit l'hyperbole équilatère qui passe par* A, B, C, D(**).

(Van de Berg.)

Solution géométrique par M. Liénard. Soient α, β, γ les centres des trois premières circonférences, et α', β', γ' ceux des trois autres, D' le centre radical de ces dernières. Les trois premiers cercles ayant constamment pour axes radicaux AD, BD, CD, les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ se déplacent parallèlement à eux-mêmes ; donc les points α, β, γ déterminent sur les médiatrices des côtés de ABC trois ponctuelles semblables. Les points α', β', γ' symétriques de α, β, γ par rapport aux milieux A', B', C'

(*) Nous avons oublié de mentionner, dans la dernière livraison, deux solutions analytiques de la question 465, par MM. Boedt et Déprez. La question 465 est proposée dans Legendre-Cambier, *Géométrie* (liv. IV).

(**) La question 142 se rattache à la transformation par cercles symétriques, étudiée par M. P. H. Schoute, comme cas particulier de la transformation birationnelle (*Bulletin des Sc. Math.*, 1882, pp. 152-168, 174-188 et 1883, pp. 314-324).

Digitized by Google

de BC, CA, AB, déterminent également trois ponctuelles semblables; donc les droites $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$ enveloppent trois paraboles tangentes aux côtés des angles A'OB', B'OC', C'OA' (O est le centre du cercle ABC). La tangente variable $\alpha'\beta'$ détermine sur la tangente fixe OA' et sur la droite de l'infini des divisions semblables, ce qui revient à dire que la ponctuelle décrite par α' est projective avec le faisceau qu'engendre une parallèle menée par un point fixe à la droite $\alpha'\beta'$; donc la ponctuelle (α') est aussi projective avec le faisceau engendré par la droite CD' perpendiculaire à $\alpha'\beta'$. On conclut aisément de là que les droites CD', AD', BD' se correspondent dans trois faisceaux projectifs, de sommets C, A, B; par suite, leur intersection D' engendre une conique passant par C, A, B.

Lorsque les points α, β, γ se transportent à l'infini, les circonférences tendent à se confondre avec les droites BC, CA, AB, et avec leurs symétriques; alors D' tend vers D. Les points α, β, γ peuvent se réunir en O; alors D' coïncide avec l'orthocentre de ABC. Concluons que le lieu de D' est l'hyperbole équilatère passant par A, B, C, D.

Question 260.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 160.)

Trouver le lieu décrit par le centre d'une ellipse qui se déplace parallèlement à elle-même, en touchant constamment une ellipse fixe égale à la première et dont les axes sont perpendiculaires à ceux de la première (*).

(H. Brocard.)

Solutions par M. Mosnat (***Toulon***). ***Première solution.*** On peut projeter l'ellipse, variable suivant un cercle de rayon b; l'ellipse fixe se projette alors suivant une autre ellipse d'axes $2a$, $\frac{2b^2}{a}$. La projection du lieu cherché ou le lieu du centre de ces cercles est la courbe parallèle a l'ellipse, c'est-à-dire la *toroïde* obtenue en portant sur les normales une longueur b. Ce lieu est une courbe du huitième ordre dont on trouvera l'équation dans Salmon (***Sections coniques***, p. 575)(**).

(*) Sur les courbes engendrées par le *motus reptorius* décrit ici, voir les travaux de Jean Bernoulli et de Prouhet, cités dans les *Préliminaires* du 4e supplément de *Mathesis*, t. IV.

(**) Voir aussi Catalan, ***Mélanges mathématiques***, t. I, p. 50. La courbe a reçu le nom de *toroïde* parce qu'elle est la section droite d'un cylindre circonscrit à un tore.

Digitized by Google

Deuxième solution. Soient (α, β) les coordonnées du centre de l'ellipse variable, les équations des deux ellipses sont :

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$a^2(x-\alpha)^2 + b^2(y-\beta)^2 - a^2b^2 = 0.$$

L'équation en λ, donnant les sécantes communes est :

$$\lambda^3 + \lambda^2(n-k) + \lambda(n-k') + 1 = 0,$$

en posant

$$n = \frac{a^4 + b^4 + a^2b^2}{a^2b^2}, \quad k = \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{a^2}, \quad k' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Les deux ellipses sont tangentes, lorsque cette équation a une racine double, ou si l'on a

$$4(n-k)^3 + 4(n-k')^3 - (n-k)^2(n-k')^2 - 18(n-k)(n-k') + 27 = 0.$$

Cette équation, qui est du huitième degré, ne renferme que $\alpha^2+\beta^2$ et $\alpha^2\beta^2$.

Autres solutions, moins complètes, par MM. Brocard et Déprez.

Notes. I. M. Déprez pose également les équations du problème plus général où l'ellipse mobile, de grandeur fixe, a constamment ses axes parallèles à deux directions rectangulaires fixes autres que celles des axes de l'ellipse fixe. On peut faire une projection orthogonale de la figure telle que l'ellipse mobile se projette suivant une circonférence de rayon constant. Par conséquent, le lieu du centre de l'ellipse mobile a encore pour projection une *toroïde*, ou courbe parallèle à une ellipse.

Le lieu d'un point invariablement lié à l'ellipse mobile est évidemment le même que celui du centre de cette courbe, à une translation près.

(J. N.)

II. Voici, sur la *toroïde*, quelques notes bibliographiques qui nous ont été communiquées par un collaborateur de *Mathesis*.

Crelle, *Mém. sur le parall. des lignes et surf. courbes* (*Ann. de Gergonne*, XII, 1821, 1 à 35).

Michel Reiss, *Dissert. inaug. de lineis et superf. aequid.* (Sur les lignes et surfaces parallèles). Göttingen, 1826.

Cauchy, *Théorie analyt. des toroïdes* C. R., 1841, XIII, p. 1062.

Breton (de Champ), *Sur les courb. parall. à l'ellipse.* N. A. M., 1844, III, 442-455.

Digitized by Google

CATALAN, *Eq. de la toroïde*, N. A. M., 1844, III, 553-555; 1863, (2), II, 371 et N. C. M., 1877, III, 24; *Mél. math.*, 1re éd., p. 49.

W. ROBERTS, N. A. M., 1864, (2), III, 80-81.

CAYLEY, *Annali di Matem.*, 1869-70, III, 311 et 345.

TORTOLINI, 1871, N. A. M., (2), X, 466-468. Cf. *Ann. de Gergonne*, 1823, XIII, 304 (TALBOT).

SCHWERING, *Bulletin des sciences mathématiques*, 1879, 471-472.

Question 347.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 143.)

Soient AB ***un diamètre fixe d'une circonférence***, N ***la projection d'un point quelconque*** M ***de la courbe sur*** AB, P ***le milieu de*** AN. ***Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire élevée au milieu de la droite*** MP.

(H. BROCARD.)

Solution par M. MOSNAT. Soient (cos 2φ, sin 2φ) les coordonnées de M, le rayon du cercle étant pris pour unité; celles de P seront ($\cos^2\varphi$, 0). D'où l'équation de la perpendiculaire au milieu de MP :

$$(x - \cos 2\varphi)^2 + (y - \sin 2\varphi)^2 = (x - \cos^2\varphi)^2 + y^2,$$

qu'on ramène facilement à la forme

$$4y\cos\varphi - (2x+1)\sin\varphi = \sin\varphi\cos^3\varphi. \qquad (1)$$

La dérivée de cette équation par rapport à φ est

$$4y\sin\varphi + (2x+1)\cos\varphi = 2\sin^2\varphi\cos\varphi - \cos^3\varphi. \qquad (2)$$

Si l'on résout les égalités (1) et (2) par rapport à x et y, on trouve les formules remarquables :

$$4y = \sin^2\varphi\sin 2\varphi, \quad 2x+1 = -\cos^2\varphi\cos 2\varphi. \qquad (3)$$

On peut également signaler la relation

$$16y^2 + (2x+1)^2 = \cos^2\varphi(4 - 11\cos^2\varphi + 8\cos^4\varphi).$$

Entre celle-ci et la seconde des égalités (3), il est facile d'éliminer φ. On trouve

$$16y^4 + y^2(8x^2 - 2x - 3\tfrac{1}{4}) + (x+1)^3(x - \tfrac{1}{2}) = 0,$$

équation d'une quartique symétrique par rapport à AB, ayant un point de rebroussement en B et passant par le milieu du rayon OA.

Digitized by Google

L'ordonnée $y = \frac{1}{4}\sin^2\varphi \sin 2\varphi$ d'un point de l'enveloppe est le quart de celle de la projection de N sur AM.

MM. Falisse et Déprez nous ont adressé une solution dans laquelle les paramètres variables sont les coordonnées cartésiennes du point M, ce qui donne lieu à des calculs plus compliqués que les précédents.

Question 367 (*).

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 199.)

Par une courbe fermée Γ, ***tracée sur une surface*** S, ***on fait passer un cylindre qu'on limite à une section droite*** Σ ***telle que le volume du solide compris entre la surface*** S, ***la surface latérale du cylindre et la section droite*** Σ ***soit constant. Démontrer que le plan de la section*** Σ ***enveloppe un paraboloïde.*** (Boubals.)

1° Désignons par A l'aire limitée par Γ sur la surface S, que nous supposons d'abord être plane. Soient G le centre de gravité de l'aire A, G′ la projection de G sur le plan Σ, V le volume constant du cylindre, δ l'angle des plans de S et Σ. D'après un théorème connu :

$$V = A\cos\delta . GG', \quad \text{d'où} \quad GG'\cos\delta = \frac{V}{A}.$$

On voit que la distance de G′ au plan S est constante ; donc le point G′ parcourt un plan fixe P, parallèle au plan S. Soit G_1 la projection de G sur P. Lorsque G′ parcourt une droite G_1g du plan P, le plan correspondant de Σ, perpendiculaire en G′ à la droite GG′, est perpendiculaire au plan GG_1g et sa trace sur ce plan enveloppe une parabole π. De là, on conclut que le plan de Σ a pour enveloppe le paraboloïde engendré par la courbe π tournant autour de GG_1, et la symétrique de cette surface par rapport au plan S.

2° Supposons maintenant que la surface S soit courbe. Décomposons l'aire A en parties infiniment petites ; soient ω l'une de ses parties,

---

(*) Nous substituons à l'énoncé primitif de la question 367 l'énoncé plus général qui nous avait été communiqué également par M. Boubals et que nous avions restreint au cas particulier d'une surface plane S pour la facilité de la démonstration. M. Jamet nous écrit qu'il a traité autrefois la proposition générale, à l'École Normale, sous la direction de M. Darboux. Les solutions données ci-dessus sont aux notations et à quelques simplifications près, celles de MM. Keelhoff et Mosnat (pour le cas particulier) et de M. Jamet (pour le cas général). (J. N.)

Digitized by Google

(x, y, z) les coordonnées d'un point M de ω par rapport à trois axes rectangulaires, et (α, β, γ) les angles que la normale au point (x, y, z) de la surface S fait avec les axes.

Si l'équation du plan de la section droite Σ du cylindre qui limite un volume constant V est

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

la distance de M à ce plan est égale à

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \tag{2}$$

la projection de ω sur ce plan a pour mesure

$$\frac{\omega(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3}$$

Le produit des expressions (2) et (3) donne le volume du cylindre élémentaire qui projette ω sur le plan (1). Par conséquent

$$V(A^2+B^2+C^2) = \Sigma\omega(Ax+By+Cz+D)(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma), \tag{4}$$

la somme indiquée dans le deuxième membre étant étendue à toutes les parties dans lesquelles on a décomposé l'aire limitée par Γ. L'équation (4) représente, en coordonnées tangentielles, l'enveloppe du plan de Σ. Comme elle est du second ordre par rapport aux quantités A, B, C dont les rapports fixent la direction du plan, et seulement du premier degré en D, l'enveloppe admet un seul plan tangent parallèle à une direction donnée; donc elle est un paraboloïde.

Toutefois, il est plus exact de dire qu'on a deux paraboloïdes; car le deuxième membre de l'équation (4) comporte le double signe $\pm$.

×Question 425.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 70.)

Étant donné l'angle A, *construire l'angle* B *donné par la relation*

$$\cos B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \cos A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A. \qquad \text{(Ph. Gilbert.)}$$

Solution par M. Mosnat. La relation peut s'écrire

$$(2\cos^2\tfrac{1}{2}B - 1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = (2\cos^2\tfrac{1}{2}A - 1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A,$$

$$\sin B - \sin A = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}A},$$

Digitized by Google

ou, en supprimant le facteur $\sin \frac{1}{2}(B - A)$ qui correspond à la solution évidente $B = A + 2n\pi$:

$$2 \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} A (\cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} A - \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} A) = 1 ;$$

ou encore

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \sin A - \cos A = 0.$$

On construit facilement $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ et par suite l'angle B.

Solution par M. Meurice. Soit, sur le cercle trigonométrique O, A l'origine des arcs. Construisons l'angle AOM égal à l'angle donné A et soient $MP = \sin A$, $OP = \cos A$. La bissectrice de l'angle AOM rencontre MP en un point D; il est facile de voir que l'on a $PD = \cos A \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$. Dans le triangle isoscèle OAM, MP et OD sont deux hauteurs; donc AD est la troisième hauteur. Si E est le point de rencontre de AD avec le diamètre OB perpendiculaire à OA, les angles EOD, ODE sont égaux comme complémentaires de $\frac{1}{2} A$. Il résulte de là que ED = EO. Donc *le lieu du point de rencontre du sinus* MP *d'un arc* AM *avec la bissectrice de l'angle* AOM *est une strophoïde ayant pour point double et pour foyer le centre* O *et l'origine* A *des arcs*.

On voit que le problème proposé revient à chercher les points d'intersection de la strophoïde avec une parallèle à OA, pourvu que l'on connaisse l'un de ces points. On peut encore dire qu'il faut construire un triangle rectangle OMP, connaissant l'hypoténuse $OM = R$, et le segment $PD = l$ déterminé sur le côté MP par la bissectrice de l'angle opposé. Ce dernier problème admet trois solutions, mais l'une des solutions est supposée connue.

L'équation proposée se ramène à

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \sin A - \cos A = 0.$$

Soit h la moyenne proportionnelle entre OA et OP. Si cos A est positif, on construira un rectangle de surface h^2 et dont les côtés ont une différence égale à sin A; m et n étant les côtés au rectangle (m le plus grand), on a pour $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$ les deux valeurs n, $-m$ ou $-n$, m suivant que l'angle A appartient au premier ou au quatrième quadrant. Dans le cas où cos A est négatif, on construira un rectangle de surface h^2 et de

Digitized by Google

périmètre $2 \sin A$; les valeurs de $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$ sont données par les côtés de ce rectangle pris avec le signe $\mp$, suivant que A est compris entre 90° et 180° ou entre 180° et 270°. Toutefois, le problème peut être impossible.

×Question 426.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 70.)

Si $x = a$, $y = b$, $z = c$ *forment une solution de l'équation*

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x), \tag{1}$$

une seconde solution est

$$\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \quad \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}, \quad \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Solution par MM. Rochetti *et* Deprez. 1° Au moyen de l'identité

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x),$$

on peut donner à l'équation (1) les deux formes suivantes

$$(x + y + z)^3 = 4(x^3 + y^3 + z^3), \tag{2}$$

$$(x + y + z)^3 = 4(x + y)(y + z)(z + x). \tag{3}$$

Si l'on observe que l'équation (1) se réduit à

$$Sx^3 = Sx^2(y + z) + 2xyz, \tag{4}$$

et que l'on a identiquement

$$(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = -Sx^3 + Sx^2(y + z) - 2xyz,$$

on trouve, en combinant par soustraction ces égalités :

$$(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = -4xyz; \tag{5}$$

autre forme remarquable de l'équation proposée.

2° Cela posé, faisons

$$A = b^2 + c^2 - a^2, \quad B = c^2 + a^2 - b^2, \quad C = a^2 + b^2 - c^2;$$

il s'agira de vérifier que $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$ est une solution de (3), ou que l'on a

$$(BC + CA + AB)^3 = 32ABC\,a^2b^2c^2. \tag{6}$$

Digitized by Google

Or

$$BC + CA + AB = -Sa^4 + 2Sa^2b^2$$
$$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c),$$

ou, en observant que a, b, c sont une solution de (5),

$$BC + CA + AB = -4abc(a+b+c). \qquad (7)$$

On a aussi

$$ABC = (Sa^2 - 2a^2)(Sa^2 - 2b^2)(Sa^2 - 2c^2)$$
$$= Sa^2[-S^2a^2 + 4Sa^2b^2] - 8a^2b^2c^2$$
$$= Sa^2[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)] - 8a^2b^2c^2,$$

ou, en tenant, de nouveau, compte de l'égalité (5) qui est vérifiée par a, b, c:

$$ABC = -4abc\,Sa^2Sa - 8a^2b^2c^2$$
$$= -4abc(Sa^2Sa + 2abc)$$
$$= -4abc[Sa^3 + Sa^2(b+c) + 2abc];$$

donc, d'après la forme (4) de l'équation proposée,

$$ABC = -8abc\,Sa^3. \qquad (8)$$

Au moyen des relations (7) et (8), l'égalité (6) se réduit à

$$(a+b+c)^3 = 4(a^3 + b^3 + c^3),$$

ce qui a lieu par hypothèse.

Note I. Posons

$$\begin{cases} x+y=2\gamma, \\ y+z=2\alpha, \\ z+x=2\beta; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=\beta+\gamma-\alpha, \\ y=\alpha-\beta+\gamma, \\ z=\alpha+\beta-\gamma; \end{cases} \qquad (9)$$

l'équation (3) deviendra

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = 32\alpha\beta\gamma. \qquad (10)$$

Ainsi toute solution de (1) fait connaître une solution de (10), et réciproquement.

La question 426 est donc équivalente à la suivante :

Toute solution α, β, γ de l'équation (10) entraîne la solution suivante

$$[(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\beta\gamma](-\alpha+\beta+\gamma),\ [(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\gamma\alpha](\alpha-\beta+\gamma),\ldots$$

II. Dans l'équation (5), posons

$$\begin{cases} y+z-x=2X, \\ x-y+z=2Y, \\ x+y-z=2Z; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=Y+Z, \\ y=Z+X, \\ z=X+Y. \end{cases}$$

Digitized by Google

Nous aurons alors

$$2XYZ = -(Y+Z)(Z+X)(X+Y), \qquad (11)$$

équation qui ne change pas quand on remplace X, Y, Z par leurs inverses.

Donc toute solution X, Y, Z de (11) entraîne une seconde solution $\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}, \frac{1}{Z}$. Ce résultat peut encore être énoncé ainsi :

Si x, y, z désigne une solution de (1), une autre solution de cette équation est

$$x(-x+y+z),\ y(x-y+z),\ z(x+y-z)(*).$$

III. Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées de deux points M_1, M_2 de la cubique représentée en coordonnées trilinéaires par l'équation (1). La droite M_1M_2 rencontre la courbe en un troisième point M_3 dont les coordonnées sont évidemment des fonctions rationnelles de celles de M_1 et M_2. Désignons par

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$$

les coordonnées de M_3; si l'on exprime qu'elles vérifient l'équation (2), on trouve aisément

$$\lambda_1 = (x_1+y_1+z_1)(x_2+y_2+z_2)^2 - 4(x_1x_2^2 + y_1y_2^2 + z_1z_2^2),$$
$$-\lambda_2 = (x_1+y_1+z_1)^2(x_2+y_2+z_2) - 4(x_1^2x_2 + y_1^2y_2 + z_1^2z_2).$$

IV. Une solution (x, y, z) de (1) en fait connaître immédiatement cinq autres représentées par

$$(y, z, x),\ (z, x, y),\ (x, z, y),\ (z, y, x),\ (y, x, z).$$

Prenant pour les coordonnées des points M_1, M_2 les valeurs (x, y, z), (y, z, x), on trouve pour celles de M_3 :

$$(z-y)\{x^3+y^3+z^3-z(x^2+xy+y^2)\},\ (y-z)\{x^3+y^3+z^3-x(y^2+y^2+z^2)\},$$
$$(z-x)\{x^3+y^3+z^3-y(x^2+xy+y^2)\}.$$

Adoptons pour le point M_1 un point quelconque de la cubique, pour le point M_2 l'un des points $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$; nous aurons les deux nouvelles solutions

$$(x-y)^2 - z^2 - 2yz, \quad (x-y)^2 - z^2 - 2xz, \quad 2z^2;$$
$$y, \qquad\qquad x, \qquad\qquad z.$$

La dernière nous était déjà connue.

(*) Nous avons proposé ce théorème dans l'*Educational Times* (1886, Q. 8513).

Digitized by Google

On pourrait encore combiner la solution (x, y, z) ou (y, z, x) avec l'une des solutions

$$\frac{1}{-x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{1}{x^2-y^2+z^2}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-z^2},$$
$$x(-x+y+z), \quad y(x-y+z), \quad z(x+y-z)$$

ou combiner celles-ci entre elles.

V. On peut aussi déterminer le point tangentiel d'un point donné M (x, y, z) de la cubique, c'est-à-dire le point de rencontre de la courbe avec la tangente menée en M. Désignons par X, Y, Z ses coordonnées; elles vérifient les équations

$$X(u^2-4x^2)+Y(u^2-4y^2)+Z(u^2-4z^2)=0,$$
$$(X+Y+Z)^3=4(X^3+Y^3+Z^3),$$

u tenant lieu de $x+y+z$. Si l'on élimine Z, on obtient une équation homogène en X, Y qui détermine pour le rapport (X : Y) trois valeurs dont deux correspondent au point M et la troisième au point tangentiel. Le produit de ces valeurs est

$$\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{X}{Y}=\frac{(y^2-z^2)(u^2-2y^2-2z^2)^2}{(z^2-x^2)(u^2-2x^2-2z^2)^2},$$

d'où l'on conclut

$$X=y^2z^2(y^2-z^2)(u^2-2y^2-2z^2)^2,$$
$$Y=z^2x^2(z^2-x^2)(u^2-2z^2-2x^2)^2,$$
$$Z=x^2y^2(x^2-y^2)(u^2-2x^2-2y^2)^2.$$

L'analyse indéterminée peut tirer, comme on vient de le voir, un excellent parti des considérations géométriques. L'équation (1) est, sous ce rapport, susceptible de développements fort intéressants, et nous engageons nos lecteurs à en continuer l'étude. (J. N.)

Question 458.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 192.)

La somme de deux cubes consécutifs n'est jamais un carré, excepté si ces cubes sont 1 *et* 8. (E. Lucas.)

Solution par M. Fauquembergue, *professeur au lycée de Mont-de-Marsan*. L'équation

$$x^3+(x+1)^3=y^2$$

Digitized by Google

peut s'écrire

$$(2x+1)(x^2+x+1)=y^2,$$

ou, en multipliant les deux membres par 4, et posant $2x+1=z$,

$$z(z^2+3)=4y^2.$$

z et z^2+3 ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que 1 et 3. Donc, il y a deux cas à distinguer.

1° z et z^2+3 premiers entre eux. Ces deux facteurs sont alors carrés parfaits, ce qui exige visiblement $z=1$, $x=0$, solution insignifiante.

2° z et z^2+3 divisibles par 3. Dans ce cas, chaque facteur doit être le triple d'un carré, et l'on a

$$z=3\alpha^2, \quad z^2+3=12\beta^2, \quad y=3\alpha\beta.$$

Il en résulte l'équation

$$3\alpha^4+1=4\beta^2,$$

que l'on peut écrire

$$(2\beta+1)(2\beta-1)=3\alpha^4.$$

Les deux facteurs $2\beta+1$ et $2\beta-1$ étant premiers entre eux, l'un d'eux doit être bicarré et l'autre le triple d'un bicarré. Or, β étant impair, $2\beta-1$ est de la forme $4n+1$, tandis que le triple d'un bicarré impair est de la forme $4n+3$ (et même $24i+3$). Donc on ne peut poser que

$$2\beta+1=3\gamma^4 \quad \text{et} \quad 2\beta-1=\delta^4;$$

d'où

$$3\gamma^4-\delta^4=2.$$

Or, il résulte des *Recherches sur l'Analyse indéterminée* (Moulins-sur-Allier, 1873) par M. Edouard Lucas, que les équations biquadratiques

$$Ax^4+By^4=\pm Cz^4,$$

où A, B, C ne contiennent que les facteurs 2 et 3, n'admettent pas d'autres solutions que les solutions immédiates. Donc, l'équation

$$3\gamma^4-\delta^4=2.1^4$$

n'est possible que pour $\gamma=\delta=1$. Par suite,

$$\alpha=\beta=1, \quad y=z=3, \quad x=1.$$

Les *Recherches* de M. Lucas ont été reproduites dans le *Bullettino del Boncompagni* (tome X, 1877) : *Recherches sur plusieurs ouvrages de*

Digitized by Google

Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure. On peut aussi consulter un *Mémoire sur quelques équations biquadratiques et indéterminées,* par le P. Pépin, inséré dans les *Atti dell' Accademia pontificia dei Nuovi Lincei* (anno XXXI, 1878).

×Question 470.

(Voir *Mathesis*, t V, p. 215.)

Dans un triangle donné ABC, *on mène par un point quelconque* M *du côté* BC *les droites* MN, MP *parallèles à deux directions données et rencontrant respectivement* AB *en* N, AC *en* P. *Chercher le minimum de* NP(*). (JENKINS.)

Solution par M. DÉPREZ. Menons CN′ et BP′ respectivement parallèles à MN et à MP, et terminées en N′ à AB, en P′ à AC. Posons

$$BP' = \beta, \quad CN' = \gamma, \quad BM = x, \quad CM = y;$$

nous aurons

$$MP = \frac{\beta y}{x+y}, \quad MN = \frac{\alpha x}{x+y}, \tag{1}$$

$$\overline{NP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{MN}^2 - 2MP \cdot MN \cos\theta,$$

θ étant l'angle des directions fixes. Remplaçant MP, MN par les valeurs (1) et désignant NP par z, on obtient

$$x^2(\alpha^2 - z^2) + y^2(\beta^2 - z^2) - 2xy(\alpha\beta\cos\theta - z^2) = 0.$$

On en conclut

$$\frac{y}{x} = \frac{\alpha\beta\cos\theta - z^2 \pm \sqrt{z^2(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta) - \alpha^2\beta^2\sin^2\theta}}{\alpha^2 - z^2}.$$

Le minimum de z est donc

$$z = \frac{\alpha\beta\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta}},$$

et correspond à

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha\cos\theta}{\alpha - \beta\cos\theta}.$$

(*) La première solution de la question est élémentaire; la seconde est d'une très-grande élégance.

Digitized by Google

Construisons un triangle auxiliaire dont les côtés mn, mp sont respectivement parallèles et égaux à CN', BP'. Le minimum cherché z sera le double de la perpendiculaire abaissée de m sur np.

Prenons sur mn et mp les longueurs $mn' = MN$, $mp' = MP'$; les points n' et p' divisent mn et pm dans le même rapport MB : MC, et comme $n'p' = NP$, on voit comment le problème proposé peut être énoncé plus simplement.

Solution par MM. Jeřábek et Farisano. Les points N et P engendrent deux ponctuelles semblables; donc la droite NP enveloppe une parabole. Le foyer F de cette conique est à l'intersection des circonférences ABP' et ACN', BP' et CN' étant parallèles aux directions données et les positions particulières de la droite NP qui correspondent aux positions B et C du point M. La circonférence ANP passe par F. Le problème est donc ramené à faire passer par A et F une circonférence telle que la corde interceptée par l'angle BAC soit un minimum. Celui-ci correspond au minimum du diamètre de la circonférence, lequel est AF; donc la droite demandée joint les projections du point F sur AB et AC.

Question 523.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 144.)

Les coniques passant par les sommets et le centre de gravité d'un triangle sont des hyperboles ayant pour asymptotes deux cordes supplémentaires de l'ellipse qui touche les côtés en leurs milieux. (Steiner.)

Solution par MM. Blondeel (Gand), Mosnat, Meurice *et* Cl. Thiry. Prenons pour axes le côté BC et la médiane AM du triangle ABC, et soient $BC = 2a$, $AM = 3m$. La conique variable a pour équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0, \qquad (1)$$

avec les conditions

$$Cx^2 + Ex + 1 \equiv C(x^2 - a^2), \quad Ca^2 = -1,$$
$$Ay^2 + Dy + 1 = A(y - m)(y - 3m), \quad 3Am^2 = 1.$$

On peut donc remplacer (1) par

$$\frac{(y - m)(y - 3m)}{3m^2} - \frac{x^2 - a^2}{a^2} + Bxy - 1 = 0. \qquad (2)$$

Digitized by Google

Le lieu du centre résulte de l'élimination de B entre les égalités

$$-\frac{2x}{a^2}+By=0,\quad \frac{2y-4m}{3m^2}+Bx=0;$$

on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y\,(y-2m)}{3m^2}=0, \tag{3}$$

équation d'une ellipse touchant l'axe des x à l'origine, et, par suite, les trois côtés du triangle ABC en leurs milieux.

Les termes du second degré de (2) étant

$$\frac{y^2}{3m^2}+Bxy-\frac{x^2}{a^2},$$

on voit facilement que la conique variable est une hyperbole et que les coefficients angulaires des asymptotes sont racines de

$$\frac{\mu^2}{3m^2}+B\mu-\frac{1}{a^2}=0. \tag{4}$$

Les coefficients angulaires de deux cordes supplémentaires de l'ellipse (3) satisfont à l'équation

$$\mu_1\mu_2=\frac{3m^2}{a^2},$$

laquelle est aussi vérifiée par les deux racines de (4); donc etc.

Note. Solution analogue par MM. Déprez, Verniory, Mandart, qui prennent pour axes de coordonnées deux côtés du triangle ABC.

Voici une solution géométrique assez simple. On peut toujours projeter le triangle ABC suivant un triangle équilatéral A'B'C'; le centre de gravité G de ABC se projette en l'orthocentre G' de A'B'C'. Les coniques passant par A', B', C', G' sont des hyperboles équilatères dont le lieu des centres est, d'après un théorème connu, le cercle des neuf points de A'B'C'; les asymptotes rectangulaires de l'une de ces hyperboles aboutissent aux extrémités d'un diamètre du cercle. De là on conclut immédiatement la question 523.

Une démonstration analogue s'applique à la généralisation suivante de la question 523, que M. Deprez établit par la géométrie analytique :

Les coniques qui passent par les sommets d'un triangle ABC *et par un point* P *tel que le quadrangle* ABCP *n'est pas convexe, sont des hyperboles*

Digitized by Google

ayant pour asymptotes deux cordes supplémentaires de l'ellipse ε *qui passe par les milieux des côtés du quadrangle* ABCP *et les intersections des côtés opposés.*

Il suffit de remarquer qu'on peut projeter les points A, B, C, P de manière que la projection de l'un d'eux soit l'orthocentre du triangle formé par les projections des trois autres.

A cette proposition générale, on peut aussi adapter le raisonnement indiqué par M. Servais pour la question 523 : l'ellipse ε est, d'après un théorème connu, le lieu des centres des hyperboles circonscrites au quadrangle ABCP. Ces hyperboles marquent sur la droite de l'infini la même involution que les diamètres conjugués de ε; car si M, N, P, Q, par exemple, sont les milieux de AB, BC, CP, PA, les diamètres conjugués de ε qui passent par les milieux des cordes parallèles MQ et NP, MN et PQ sont parallèles aux droites AC et BP, qui forment l'une des coniques du faisceau ABCP. (J. N.)

Autre solution géométrique par M. Jamet; nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire.

QUESTIONS D'EXAMEN.

331. A un triangle donné ABC, on inscrit un rectangle DEFG dont la base FG repose sur BC. Déterminer ce rectangle par la condition que sa surface augmentée de celle du triangle équilatéral construit sur FG soit égale à un carré donné k^2. Discuter(*). (St Cyr, 1887.)

Soient x, y la base et la hauteur du rectangle, et a, h celles du triangle ABC. On a

$$xy + \tfrac{1}{4}x^2\sqrt{3} = k^2, \quad x : a = h - y : h;$$

d'où

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{h}{a}\right)x^2 + hx - k^2 = f(x) = 0, \tag{1}$$

$$2x\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{h}{a}\right) = -h \pm \sqrt{h^2 + 4k^2\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{h}{a}\right)}.$$

On aperçoit mieux les résultats de la discussion, si l'on substitue au triangle

---

(*) Nous avons cru utile de développer cette discussion d'après les principes admis aujourd'hui dans l'enseignement en France. (J. N.)

Digitized by Google

donné ABC un triangle A'BC rectangle en B et ayant même hauteur. A une valeur de x plus grande que a, correspond un rectangle *exinscrit; y* est alors négatif. Une valeur négative de x donne également lieu à un rectangle exinscrit. Dans ces deux cas, la solution est *impropre :* le triangle équilatéral construit sur FG excède le rectangle DEFG de la quantité k^2.

1° $\frac{k}{a} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Une seule valeur $x = k^2 : k$; solution propre si $k^2 \leq ak$, et solution impropre si $k^2 > ak$.

2° $\frac{k}{a} < \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Deux valeurs réelles de x, l'une positive et l'autre négative. La première racine donne une solution propre, si $f(0)$ et $f(a)$ sont de signes contraires, ce qui exige $k^2 < \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

3° $\frac{k}{a} > \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Pour que les racines soient réelles, il faut que $4k^2\left(\frac{k}{a} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) \leq k^2$; les deux valeurs (2) sont alors positives. La plus petite racine seule donne une solution propre, si $f(0)$ et $f(a)$ sont de signes contraires ou si $k^2 < \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; cette limite de k^2, en général inférieure à celle qui correspond à la réalité des racines, et lui est égale, lorsque $k = h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Dans l'hypothèse $k^2 > \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, les deux valeurs de x sont, à la fois, plus petites ou plus grandes que a; on distingue ces deux cas l'un de l'autre, en examinant si a est plus grand ou plus petit que la demi-somme des racines x' et x'', ce qui correspond à $k >$ ou $< \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

332. Les hauteurs AA', BB', CC' d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite en A'', B'', C''. Exprimer AA', AA'', ... en fonction de R, A, B, C et montrer que la somme $\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'}$ a une valeur constante. (St Cyr, 1887.)

333. Déterminer les valeurs de x satisfaisant à l'équation

$$\sin x = \sin a + \sin(a + h) + \sin(a + 2h).$$

On donne

$$a = 8°25'37'', \quad h = 7°17'26''. \qquad \text{(St Cyr, 1887.)}$$

Le deuxième membre peut prendre la forme

$$2\sin(a + h)(\cos h + \cos 60°) = 4\sin(a + h)\cos(\tfrac{1}{2}h + 30°)\cos(\tfrac{1}{2}h - 30°).$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**580.** Dans tout triangle ABC, on a

$$\frac{a^2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A + b^2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B + c^2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}{a^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}A + b^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}B + c^2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}C} = \frac{R + r}{R - r}.$$

(Knowles.)

Digitized by Google

581. Une ellipse, dont le centre est C, tourne dans son plan autour de son foyer F. Elle coupe en D une droite fixe FX. Sur la normale en D on porte une longueur DN égale au demi-diamètre conjugué avec CD. Le lieu de N est une circonférence.

×**582.** Si l'on considère les séries

$$\begin{aligned} n &: 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots \\ u_n &: 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots \\ v_n &: 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ \ldots; \end{aligned}$$

démontrer que l'on a

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \\ v_{2n} &= u_{n-1}^2 + 2u_n^2 + u_{n+1}^2, \\ v_{4n+2} &= v_{2n+1}^2 + 2, \\ v_{4n} &= (2u_n)^2 + u_n^2 + 2. \end{aligned}$$

et décomposer en carrés u_{2n} et v_{2n+1}. (Ed. Lucas.)

583. Trouver le lieu géométrique du point qui divise dans un rapport constant k la normale à une conique, limitée de part et d'autre à la courbe.

584. Chercher le lieu des sommets et l'enveloppe des axes des paraboles tangentes à une droite donnée OX en un point variable, et passant par deux points fixes d'une droite perpendiculaire à OX. (Brocard.)

×**585.** Résoudre l'équation

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + x^4 = (bc + ax)^2 + (ca + bx)^2 + (ab + cx)^2 \\ + \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + x^2)^2. \end{aligned}$$ (E. Catalan.)

×**586.** Sur les côtés AC, BC d'un triangle ABC, on prend AD = BE. Si, la base BC étant fixe, le sommet C décrit une circonférence passant par les extrémités de cette base, le point M, milieu de la droite DE, décrit une circonférence ayant pour centre le milieu de AB. (E. Catalan.)

587. *Généralisation.* Si deux droites AD, BE tournent autour de leurs extrémités A, B avec la même vitesse angulaire : 1° le point M qui divise la droite DE dans un rapport donné $m : n$ décrit une circonférence ; 2° il existe un point fixe S tel que le triangle SDE est de forme constante ; 3° la droite DE enveloppe une conique ayant pour foyer le point S ; elle est divisée par son point de contact en deux parties proportionnelles aux projections de AD, BE sur DE. (J. Neuberg.)

Digitized by Google

SUR L'HYPERBOLE DE KIEPERT(*);

par M. M'Cay, du Trinity College, Dublin.

Si sur les côtés d'un triangle ABC comme bases, on construit trois triangles isoscèles semblables BCA_1, CAB_1, ABC_1, les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point P. Ce point, lorsque l'angle A_1BC varie, décrit une hyperbole équilatère Γ, qui porte le nom d'*hyperbole de Kiepert* (N. A. M., 1869, (2), VIII, p. 40-42).

Soit θ l'angle CBA_1 mesuré vers l'intérieur du triangle ABC; les coordonnées normales de P sont

$$\frac{1}{\sin(A-\theta)}, \quad \frac{1}{\sin(B-\theta)}, \quad \frac{1}{\sin(C-\theta)}. \tag{1}$$

et l'équation de Γ est

$$\frac{\sin(B-C)}{x}+\frac{\sin(C-A)}{y}+\frac{\sin(A-B)}{z}=0.$$

L'inverse de P a pour coordonnées

$$\sin(A-\theta), \quad \sin(B-\theta), \quad \sin(C-\theta); \tag{2}$$

il a pour lieu géométrique la droite OK qui passe par le centre O du cercle ABC et par le point de Lemoine K.

Il nous a paru utile de rappeler ces notions connues, avant de passer à de nouveaux développements sur la courbe Γ.

1. Théorème fondamental. *Une droite quelconque rencontre l'hyperbole* Γ *en deux points* P_1, P_2 *et la droite* OK *en un point* Q_3; *soient* θ_1, θ_2, θ_3 *les valeurs de* θ *qui correspondent à ces trois points : la somme* $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ *est égale à un multiple de* π. En effet, en prenant les coordonnées de P_1, P_2 sous la forme (1), on trouve facilement pour l'équation de la corde P_1P_2 :

$$Sx\sin(A-\theta_1)\sin(A-\theta_2)\sin(B-C)=0;$$

(*) Cet article nous a été remis au mois de Janvier 1887. Il contient une foule de résultats forts intéressants, obtenus par des méthodes très-simples. Nous regrettons beaucoup que l'abondance des matières en ait retardé la publication.

M. M'Cay a publié un mémoire important sur la géométrie récente, intitulé : *On three circles related on the triangles* (Irish Transactions, 1885). (La Rédaction.)

Digitized by Google

d'où, l'égalité de condition

$$S \sin(A - \theta_1) \sin(A - \theta_2) \sin(A - \theta_3) \sin(B - C) = 0.$$

Cette relation est symétrique en $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. On peut lui donner la forme

$$S [\cos(2A - \theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_3)] \sin(A - \theta_3) \sin(B - C) = 0;$$

ou, en observant que le coefficient de $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ est nul,

$$S [\sin(3A - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) + \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - A)] \sin(B - C) = 0.$$

Ordonnons suivant les lignes trigonométriques de $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$, $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3$. Comme

$$S \sin A \sin(B - C) = 0, \quad S \cos A \sin(B - C) = 0,$$

$$S \sin 3A \sin(B - C) = 3S \sin A \sin(B - C) - 4S \sin^3 A \sin(B + C) \sin(B - C)$$

$$= -4S \sin^2 A (\sin^2 B - \sin^2 C) = 0,$$

on obtient définitivement

$$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 0, \quad \text{ou} \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = n\pi.$$

2. Conséquences. 1° *La tangente en un point de* Γ, *de paramètre* θ(*), *rencontre* OK *en un point dont le paramètre est* -2θ.

2° *La droite qui joint deux points inverses de* Γ *et* OK, *correspondant à l'angle* θ, *rencontre* Γ *en un second point ayant pour paramètre* -2θ.

3° Soient P_1, P_2, P_3 trois points de Γ, tels que la somme de leurs paramètres $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = n\pi$, et soient Q_1, Q_2, Q_3 les inverses de ces points.

Les côtés du triangle $P_1P_2P_3$ *passent respectivement par les points* Q_1, Q_2, Q_3; *les droites* P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 *rencontrent* Γ *en trois nouveaux points* R_1, R_2, R_3 *qui sont les inverses des points* S_1, S_2, S_3 *où les tangentes menées en* P_1, P_2, P_3 *à* Γ *coupent* OK; *les côtés du triangle* $R_1R_2R_3$ *passent par* S_1, S_2, S_3(**).

4° Soient BCA_1, CAB_1, ABC_1 trois triangles isoscèles semblables tournés vers l'intérieur de ABC et BCA'_1, CAB'_1, ABC'_1 leurs symétriques par rapport à BC, CA, AB. Désignons par P le point de con-

(*) Les coordonnées des points de Γ et OK étant prises sous la forme (1) et (3), nous appelons θ le *paramètre* de ces points. Il peut être augmenté ou diminué d'un multiple de π.

(**) On peut rapprocher ce théorème de l'exercice 128, p. 326, de la *Géométrie analytique* de Casey, dont l'énoncé suivant conduit à une démonstration intuitive : *Si deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet sont des points inverses, les deux autres sommets sont aussi des points inverses.* (J. N.)

Digitized by Google

cours de AA_1, BB_1, CC_1 et, par P' celui de AA'_1, BB'_1, CC'_1, et soient Q, Q' les inverses de P, P'. Les paramètres de P et Q, P' et Q' étant respectivement θ, $-\theta$, on déduit, de la relation $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = n\pi$, que le point de rencontre de PQ avec OK, et celui de Γ avec PQ' ou P'Q ont pour paramètre 0. Donc

La droite PQ *passe par le point de Lemoine* K(*), *et les droites* PQ', P'Q *se coupent sur* Γ *au centre de gravité* G; *les points* Q, Q' *divisent* OK *harmoniquement.*

5° D'un point quelconque Q de OK, menons à Γ deux tangentes QP, QP'; θ étant le paramètre de Q, ceux des points de contact P, P' sont

$$\mu_1 = -\tfrac{1}{2}\theta, \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta;$$

d'où les relations

$$\mu_2 - \mu_1 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \mu_1 + \mu_2 + (\theta - \tfrac{1}{2}\pi) = 0,$$

et l'équation de la corde PP' :

$$S\,\alpha \sin(2A + \theta)\sin(B - C) = 0.$$

Celle-ci est vérifiée par les coordonnées $\cos(B - C)$, $\cos(C - A)$, $\cos(A - B)$ du centre M du cercle des neuf points de ABC. Par conséquent :

Les points de contact des tangentes issues d'un point Q *de* OK *ont des paramètres dont la différence égale* $\frac{1}{2}\pi$; *la corde des contacts passe par le centre du cercle des neuf points et rencontre* OK *en un point* Q' *tel que la différence des paramètres de* Q et Q' *égale* $\frac{1}{2}\pi$(**).

3. Cas particuliers. Nous rapportons d'abord les valeurs de θ qui correspondent aux couples de points remarquables situés sur Γ et OK.

1° H, O; orthocentre et centre du cercle circonscrit : $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

2° G, K; centre de gravité et point de Lemoine : $\theta = 0$.

3° Z', Z; Z est le milieu de OK ou le centre du cercle de Brocard(***) : $\theta = V - \frac{1}{2}\pi$, V étant l'angle de Brocard.

4° N, N'; N' est le point à l'infini sur OK, N le point de Tarry : $\theta = \frac{1}{2}\pi - V$(****).

(*) Propriété déjà signalée par M. Lemoine (Congrès de Grenoble, 1885.) *Mathesis*, 1886, t. VI, supplément.

(**) Les triangles isoscèles correspondants, construits sur un côté de ABC ont donc leurs côtés perpendiculaires.

(***) Les coordonnées normales absolues de Z sont $[R\cos(A - V) : 2\cos V]$, etc.

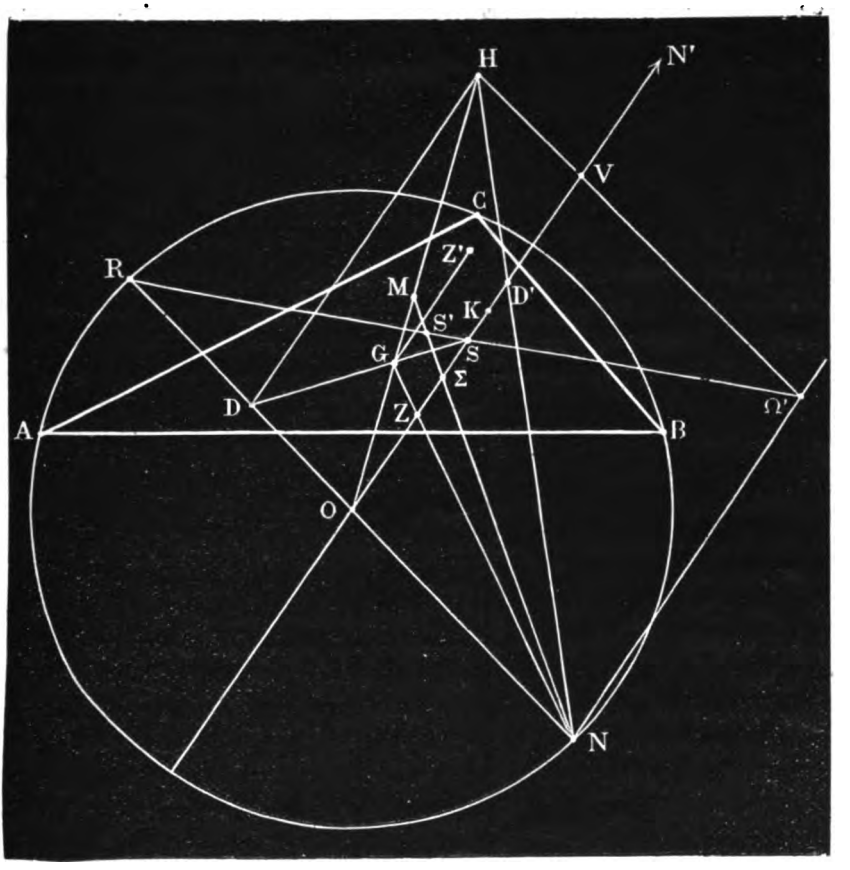
(****) Les coordonnées normales de N' sont proportionnelles à $\cos(A + V)$, $\cos(B + V)$, $\cos(C + V)$; NH est un diamètre de Γ.

Digitized by Google

5° S', S; S est le milieu de la droite qui joint les points de Brocard ω, ω'; il divise OK dans le rapport ($\cos^2 V : \sin^2 V$). Ici $\theta = -V$.

6° D, D'; D est le centre d'homologie de ABC et du premier triangle de Brocard, D' est le pôle de la corde ωω' du cercle de Brocard (*) : $\theta = V$.

7° Les *centres isogones* P, P' sont à l'intersection des droites joignant



A, B, C aux sommets des triangles équilatéraux construits intérieurement ou extérieurement sur les côtés BC, CA, AB; leurs inverses W, W' sont

(*) Les coordonnées de D' sont [R sin V sin (A — V) : cos 2V], etc.

Digitized by Google

les *centres isodynamiques*, situés à l'intersection des trois cercles d'Apollonius. Pour ces points, $\theta = \pm \frac{1}{3}\pi$.

8° Désignons par T, T′ les centres de perspective du triangle ABC et du triangle ayant pour sommets les centres des carrés construits, soit intérieurement, soit extérieurement sur les côtés de ABC; soient aussi t, t' les inverses de T, T′. Les paramètres de ces points sont $\theta = \pm \frac{1}{4}\pi$.

9° Si l'on joint A, B, C aux centres des triangles équilatéraux construits sur les côtés de ABC, on obtient deux points p, p'; soient w, w' leurs inverses. Ces points correspondent à $\theta = \pm \frac{1}{6}\pi$.

4. En appliqnant la proposition du § 2, 4°, on voit que les droites

$$Z'N,\ S'D,\ PP',\ TT',\ pp'$$

passent par K, et que les droites

$$Z'N',\ ZN,\ S'D',\ SD,\ PW',\ P'W,\ Tt',\ T't,\ pw',\ p'w$$

se croisent en G.

Les théorèmes du § 2, 1° et 2° montrent que les tangentes menées à Γ en H et G concourent au point K; que les tangentes menées en T et T′ concourent au point O, donc (§ 2, 5°) les points T, T′ sont en ligne droite avec K et M.

On constate encore facilement que les droites ND, S′Z′ se coupent en O, et que les droites S′Z, WD′, N′D, SZ′ passent par H.

De même, les tangentes en P et p' concourent en W; celles qui ont leurs points de contact en P′ et p concourent en W′. Les droites Pp', $P'p$ se croisent donc en M(*).

Les lignes GZ′ et DH étant parallèles à OK (elles passent par N′) et M divisant GH dans le rapport 1 : 2, on trouve aisément que $DM = 2MZ'$.

Quelques-uns de ces résultats ont été signalés par M. Brocard (Voir J. M. S. 1885, *Hyperbole des neuf points*); mais notre méthode a l'avantage de rendre ces propositions intuitives.

5. Voici quelques autres applications de notre théorème fondamental.

La droite NS rencontre Γ en un point Σ′, et NS′ rencontre OK en un point Σ : les points Σ, Σ′ ont pour paramètre $2V - \frac{1}{2}\pi$, et la droite S′Σ′ est parallèle à OK.

(*) On ne trouve dans la figure que les principaux points mentionnés dans le texte. Une branche de Γ passe par ADGS′Z′CH, l'autre par NBΩ′. Voir aussi le supplément à *Mathesis*, 1884, t. IV.

Digitized by Google

Soit Ω' le point d'intersection de SS' avec Γ; le paramètre de ce point étant 2V, la droite $N\Omega'$ est parallèle à OK, la corde NS' a pour pôle l'inverse Ω de Ω' et passe par M. NH étant un diamètre de Γ et HD étant parallèle à OK, les lignes $N\Omega'$ et HD sont égales et parallèles.

$H\Omega'$ rencontre OK en un point V, dont le paramètre est $\frac{1}{2}\pi - 2V$; donc Σ et V partagent OK harmoniquement. Les points D, Z', V sont en ligne droite, et $OV = 2OS$, $DZ' = 2Z'V$.

La droite $SS'\Omega'$ ayant pour équation

$$Sx \sin(A+V) \sin(A-2V) \sin(B-C) = 0,$$

on vérifie facilement qu'elle passe par le point de Steiner R (les coordonnées de R sont inversement proportionnelles à $\sin^2 A \sin(B-C)$, etc.) (Brocard, ***Ed. Times***, janvier 1887).

Soient, comme précédemment, BCA_1, CAB_1, ABC_1 trois triangles isoscèles semblables. L'axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ enveloppe une parabole inscrite à ABC et ayant pour directrice HO; le foyer F de cette conique a pour coordonnées

$$\frac{1}{\sin(B-C)}, \quad \frac{1}{\sin(C-A)}, \quad \frac{1}{\sin(A-B)}.$$

Au moyen de l'équation de la corde NG, laquelle est

$$Sx \cos(A+V) \sin A \sin(B-C) = 0,$$

on démontre aisément que NG passe par F (Brocard, ***Ed. Times***, juin 1886.)

6. Les coordonnées normales absolues des points H et D' sont

$$H_a = 2R \cos B \cos C, \text{ etc.}; \quad D'_a = \frac{R \sin V \sin(A-V)}{\cos 2V}, \text{ etc.}$$

Or

$$\frac{H_a - 2D'_a \cos 2V}{1 - 2\cos 2V} = \frac{2R \cos(B+V) \cos(C+V)}{1 - 2\cos 2V} = N_a,$$

ce qui démontre que N divise HD' et DO soustractivement dans le rapport $2\cos 2V : 1$.

On peut procéder de la même manière pour les autres systèmes de trois points en ligne droite.

7. Les points de contact Δ_1, Δ'_1 des tangentes menées à Γ parallèlement à OK ont pour paramètres $\frac{1}{2}V \pm \frac{1}{4}\pi$. Ces points sont les points doubles de l'involution déterminée sur Γ par les cordes parallèles à OK. Les points correspondants Δ, Δ' de OK sont les points doubles de l'involu-

Digitized by Google

tion marquée sur OK par les droites joignant N aux extrémités de ces cordes. NΩ′ étant parallèle à OK, la tangente NΩ en N détermine le point central Ω de l'involution; donc Ω est le milieu de ΔΔ′. Cette relation a été également signalée par M. Brocard.

8. Les points A, B, C, considérés comme appartenant à l'hyperbole Γ ont respectivement pour paramètres les angles A, B, C du triangle de référence. Les tangentes en ces points sont les droites isogonales de celles qui joignent les sommets du triangle de référence aux points d'intersection de OK avec les côtés opposés; elles rencontrent OK en trois points ayant pour paramètres $-2A$, $-2B$, $-2C$. Ces droites forment un triangle $A_2B_2C_2$ homologique avec ABC. Le centre d'homologie, qui a pour coordonnées $\sin(B-C)$, $\sin(C-A)$, $\sin(A-B)$, est l'inverse du point F; il est situé à l'infini sur la droite de Longchamps.

L'équation de Γ exprime que la polaire trilinéaire d'un point quelconque de cette courbe passe par le point ayant pour coordonnées $\sin(B-C)$, etc.; autrement dit, Γ est le lieu du pôle trilinéaire d'une droite qui se meut en restant perpendiculaire à GO (Neuberg, *Sur le point de Steiner*, Journal de Math. spéciales, 1886, p. 74.)

9. On a vu que la droite PP′ passe par K, et que les droites PW, P′W′ sont des tangentes de Γ. L'équation de PP′ est

$$S\alpha(\sin^2 A - \sin^2 \tfrac{1}{3}\pi)\sin(B-C) = 0.$$

Elle peut servir à vérifier que la droite PP′ passe par le centre de Γ et par le milieu de GH(*), et est, par suite, le diamètre conjugué avec GH.

10. *Involutions sur l'hyperbole de Kiepert.* Les sommets A_1, B_1, C_1 de trois triangles isoscèles semblables construits sur les côtés du triangle ABC, marquent sur les médiatrices trois ponctuelles semblables. De là on peut déduire, ainsi que l'a fait M. Arztz, que le point d'intersection P_1 des droites AA_1, BB_1, CC_1 décrit une hyperbole équilatère Γ′.

Considérons maintenant deux triples de points homologues (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) de ces ponctuelles semblables, tels que les couples $(A_1 A_2)$, (B_1, B_2), (C_1, C_2) fassent partie de trois involutions. Les droites AA_1, AA_2 seront des rayons conjugués d'un faisceau involutif dont le sommet est sur Γ; donc elles coupent cette conique en des points P_1, P_2 qui sont en

(*) Cette propriété a été établie géométriquement par Woolhouse dans le *Ladys and Gentlemans Diary*, en 1865.

Digitized by Google

ligne droite avec un point fixe π, et les tangentes en P_1, P_2 se coupent sur une droite fixe, polaire de π.

11. Le premier cas particulier qui se présente, est celui où les droites BA_1, BA_2 sont rectangulaires. La relation entre les paramètres des points P_1, P_2 est alors $\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{2}\pi$, et l'équation de la corde P_1P_2 se réduit à

$$S\alpha \sin 2(A - \theta_1) \sin(B - C) = 0,$$

ou

$$\cos 2\theta_1 . S\alpha \sin 2A \sin(B - C) - \sin 2\theta_1 . S\alpha \cos 2A \sin(B - C) = 0.$$

Cette corde passe donc par le point d'intersection des droites représentées par

$$S\alpha \sin 2A \sin(B - C) = 0, \quad S\alpha \cos 2A \sin(B - C) = 0,$$

point qui a pour coordonnées $\cos(B - C)$, etc. Nous retrouvons ainsi la proposition du § 2, 5°. Parmi les couples de points rentrant dans ce cas, signalons H et G, T et T′ (§ 3, 8°), P et p', P′ et p (§ 3, 7° et 9°), N et S′.

12. Une involution remarquable correspond à $\theta_1 + \theta_2 = 2\theta_3$, θ_3 étant une constante. Nous pouvons écrire $\theta_1 = \theta_3 + \varepsilon$, $\theta_2 = \theta_3 - \varepsilon$, en désignant par ε un angle variable. La corde P_1P_2 a ainsi pour équation

$$S\alpha [\sin^2(A - \theta_3) - \sin^2\varepsilon] \sin(B - C) = 0;$$

elle passe donc par le point d'intersection des droites représentées par

$$S\alpha \sin^2(A - \theta_3) \sin(B - C) = 0, \quad S\alpha \sin(B - C) = 0.$$

La seconde de ces droites est OK, et les coordonnées du point sont

$$\sin(A + 2\theta_3), \quad \sin(B + 2\theta_3), \quad \sin(C + 2\theta_3).$$

Il est facile de conclure de là notre théorème fondamental.

La proposition de M. Lemoine (§ 2, 4°) correspond à l'hypothèse $\theta_3 = 0$.

13. Étudions plus particulièrement le cas de $\theta_1 + \theta_2 = \frac{1}{2}\pi$. La droite P_1P_2 passe alors constamment par le point O. Les points doubles de l'involution des couples (A_1, A_2) sont les centres des deux carrés construits sur BC; donc les tangentes aux points T, T′ de Γ (§ 3, 8°) se coupent en O. De même, les cordes Pp, $P'p'$ (§ 3, 7° et 9°), Z′S′ et ND concourent en O.

Les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle $A_1B_1C_1$ (*) sur

(*) Les notations sont celles du n° 10.

Digitized by Google

les côtés correspondants du triangle ABC concourent au point O ; donc d'après un théorème connu, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 concourent également en un même point. Je dis que ce point est le point P_2 de l'hyperbole Γ qui correspond au point d'intersection P_1 des droites AA_1, BB_1, CC_1 dans l'involution caractérisée par $\theta_1 + \theta_2 = \frac{1}{2}\pi$. En effet, les équations de A_1B_1 et CC_2 sont

$$x(\sin C \sin A - \sin 2\theta_1 \sin B) + y(\sin B \sin C - \sin 2\theta_1 \sin A) - z \sin(C - 2\theta_1) = 0,$$

$$x \cos(A + \theta_1) - y \cos(B + \theta_2) = 0,$$

et l'on peut vérifier que ces droites sont perpendiculaires.

La proposition précédente généralise une propriété, bien connue, du point de Tarry : les droites AN, BN, CN sont perpendiculaires aux côtés du premier triangle de Brocard (*).

14. *Les triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *qui correspondent à* $\theta_1 + \theta_2 = \frac{1}{2}\pi$ *et le triangle* ABC *ont même axe de perspective, et cet axe est perpendiculaire à la droite* P_1OP_2. En effet, le point d'intersection de A_1B_1 avec AB (voir l'équation de B_1C_1 au § 13) satisfait à l'équation

$$x(\sin C \sin A - \sin 2\theta_1 \sin B) + y(\sin B \sin C - \sin 2\theta_1 \sin A) = 0.$$

(*) Voici deux autres cas particuliers de la proposition :

1° *Soient* A_1, B_1, C_1 *les centres des carrés construits extérieurement ou intérieurement sur les côtés du triangle* ABC; *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *sont perpendiculaires (et égales) aux côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ (Neuberg, N. C. M., t. IV, p. 142-145.)

2° *Soient* A_1, B_1, C_1 *les sommets des triangles équilatéraux construits extérieurement ou intérieurement sur les côtés du triangle* ABC, *et soient* A_2, B_2, C_2 *les centres de ces triangles équilatéraux. Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *sont perpendiculaires à* B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 (ce sont les cordes communes des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux, et les lignes des centres sont B_2C_2, etc.); *de même* AA_2 *est perpendiculaire à* B_1C_1 *etc* (Comp. N. C. M., III, p. 330).

La démonstration que nous avons donnée du premier de ces cas peut s'étendre au cas général. En effet, si α, β, γ sont les milieux des côtés de ABC, la ligne B_1C_1 est la résultante des lignes $C_1\gamma$, $\gamma\beta$, βB_1; et AA_2 est celle des lignes $A\alpha$, αA_1. Supposons $\gamma C_1 = \frac{1}{2}\lambda c$, $\beta B_1 = \frac{1}{2}\lambda b$, $\alpha A_1 = \frac{1}{2}\lambda c$, $\alpha A_2 = \frac{c}{2\lambda}$. Alors les lignes $C_1\gamma$, βB_1, perpendiculaires à $A\gamma$, $A\beta$ et égales à ces droites multipliées par λ, ont une résultante perpendiculaire à la résultante $A\alpha$ de $A\gamma$, $A\beta$, et égale à $\lambda.A\alpha$; $\gamma\beta$ est aussi perpendiculaire à αA_2 et égale à $\lambda.\alpha A_2$. Il résulte de là que C_1B_1 est perpendiculaire à AA_2 et égale à $\lambda\, AA_2$. (J. N.)

Digitized by Google

De là, on conclut que les points de rencontre A_3, B_3, C_3 des côtés correspondants des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont sur la droite représentée par l'équation

$$\frac{x}{\sin B \sin C - \sin 2\theta_1 \sin A} + \text{etc.} = 0.$$

Or, cette équation ne change pas quand on remplace θ_1 par $\theta_2 = \frac{1}{2}\pi - \theta_1$.

Ensuite, les circonférences décrites des points A_3, B_3, C_3 comme centres, respectivement avec les rayons A_3A, B_3B, C_3C, ont pour axe radical la droite P_1P_2. Car les deux premières circonférences, et celle qui a pour centre le point C_1 et pour rayon $C_1A = C_1B$, ont pour axes radicaux les droites AA_2, BB_2 perpendiculaires aux lignes des centres A_3C_1, B_3C_1, de sorte que le point de concours P_2 de AA_2, BB_2 est sur l'axe radical des circonférences A_3, B_3. On voit donc que les points P_2, P_1 sont d'égale puissance par rapport aux trois circonférences A_3, B_3, C_3, dont les centres sont, d'ailleurs, en ligne droite (*).

15. En particulier, l'axe d'homologie de ABC et du premier triangle de Brocard est perpendiculaire au diamètre DNR du cercle ABC. Il a pour équation (§ 14)

$$\frac{x}{\sin B \sin C - \sin 2V \sin A} + \cdots = 0,$$

ou, après quelques transformations faciles,

$$\frac{x \sin^2 A}{\sin(A - 2V)} + \cdots = 0. \qquad (1)$$

L'équation de la tangente au point (x', y', z') de la circonférence peut se mettre sous la forme

$$\frac{x \sin A}{x'^2} + \cdots = 0;$$

donc la tangente au point N est représentée par

$$x \cos^2(A + V) \sin A + \cdots = 0.$$

Les valeurs de x, y, z qu'on tire de cette égalité combinée avec l'équation de la droite à l'infini : $x \sin A + \cdots = 0$, vérifient également l'équation (1), ce qui démontre de nouveau que la droite (1) est perpendiculaire à ON.

(*) Cette proposition résulte aussi du § 57 du *Mémoire sur le tétraèdre*, par M. Neuberg; la démonstration de ce géomètre diffère de la nôtre. (M'Cay.)

Digitized by Google

16. On trouve aisément les coordonnées du centre de l'hyperbole Γ :

$$\sin A \sin^2 (B - C), \quad \sin B \sin^2 (C - A), \quad \sin C \sin^2 (A - B).$$

Ce point est au milieu de HN, appartient au cercle des neuf points et est le complémentaire du point de Steiner de ABC; il appartient donc aussi à l'ellipse maximum inscrite à ABC, propriété qu'on rencontre déjà dans l'*Ed. Times, Reprint*, vol. IV, 1865.

La droite OK rencontre la circonférence ABC en deux points l, l' dont les inverses sont à l'infini sur l'hyperbole Γ; donc les asymptotes de cette courbe sont parallèles aux symétriques des droites Al, Al' par rapport à la bissectrice de l'angle BAC (Brocard, loc. cit.).

17. *Sur certains groupes de trois circonférences.* Soient P_1, P_2 deux points de Γ correspondant aux triangles isoscèles BCA_1, CAB_1, BAC_1 et BCA_2, CAB_2, BAC_2, dont les angles à la base sont respectivement θ_1, θ_2 et vérifient la relation $\theta_1 + \theta_2 = \frac{1}{2}\pi$. Désignons par (A_1) la circonférence qui a pour centre A_1 et passe par les extrémités du côté BC. Les circonférences (A_1) et (B_1) passent par C et la droite CP_2A_2 est perpendiculaire à la ligne des centres A_1B_1 (§ 13). Par conséquent :

Si sur les trois côtés d'un triangle ABC, *on décrit trois segments de cercle capables d'un même angle ε, le centre radical des trois circonférences ainsi obtenues est un point* P_2 *de l'hyperbole de Kiepert; le centre d'homologie du triangle* ABC *et du triangle des centres des trois circonférences est un autre point* P_1 *de la même hyperbole; les points* P_1 *et* P_2 *sont en ligne droite avec le centre* O *de la circonférence* ABC.

Si l'on remplace l'angle ε par son complément, les deux points P_1, P_2 *ne font qu'intervertir leurs rôles.*

18. Soient A_4, B_4, C_4 les secondes intersections des circonférences (A_1), (B_1), (C_1) considérées deux à deux. Transformons les circonférences (A_1), (B_1) par rayons vecteurs réciproques en mettant le pôle d'inversion en C. Ces lignes se changeront en deux droites pivotant autour des points inverses de A et B de manière à former avec CA, CB constamment le même angle; donc leur point d'intersection décrit une hyperbole équilatère passant par C et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle BCA. Le lieu de C_4 est l'inverse de cette hyperbole par rapport à C; c'est une strophoïde oblique ayant C pour point double et pour tangentes en ce point les bissectrices de l'angle BCA.

Digitized by Google

On parvient à la même conclusion en observant que la bissectrice de l'angle AC_4B passe par le point fixe C.

19. Soumettons maintenant la figure à une inversion trilinéaire. Les circonférences (A_1), (B_1), (C_1) seront remplacées par les circonférences des segments capables des angles $\pi - A - \varepsilon$, $\pi - B - \varepsilon$, $\pi - C - \varepsilon$, décrits sur AC, CA, AB; aux cordes communes AA_4, BB_4, CC_4 des premières circonférences correspondront les cordes communes des nouvelles circonférences. Donc le centre radical de ces dernières circonférences est l'inverse de celui de (A_1), (B_1), (C_1) et, par suite, est un point de la droite OK.

D'où le théorème suivant dû à M. Tesch (*Wiskundige opgaven*, deel III, n°21): *Si, sur les côtés d'un triangle* ABC, *on décrit les segments capables des angles* $A + \varphi$, $B + \varphi$, $C + \varphi$, *le centre radical des trois circonférences décrit la droite* OK; ou encore : *si, par les extrémités de chaque côté d'un triangle* ABC, *on fait passer une circonférence coupant la circonférence* ABC *sous un même angle, le centre radical des trois circonférences ainsi décrites appartient à la droite* OK.

20. On peut démontrer directement la dernière proposition.

Considérons d'abord trois cercles fixes Z_1, Z_2, Z_3, et un quatrième cercle variable O, coupant les trois premiers sous un même angle ε aux points (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3). De l'égalité des angles OX_1X_2 et OX_2X_1, OX_1Z_1 et OX_2Z_2(*), on conclut que X_1, X_2 sont des points antihomologues des cercles Z_1, Z_2; donc X_1X_2 et Y_1Y_2 passent par un centre de similitude S_3 de ces cercles, et la puissance du cercle O par rapport au point S_3 est constante. De même, X_2X_3 et Y_2Y_3 passent par un centre de similitude S_1 des cercles Z_2 et Z_3, et le produit $S_1X_2 \cdot S_1X_3$ est constant. Donc tous les cercles O qu'on obtient en faisant varier l'angle ε, ont même axe radical S_1S_3; par conséquent, le lieu de leurs centres est une droite perpendiculaire à S_1S_3 et passant par le centre radical des cercles Z_1, Z_2, Z_3, centre du cercle coupant orthogonalement les cercles Z_1, Z_2, Z_3.

Réciproquement, si trois cercles variables Z_1, Z_2, Z_3 coupent sous un même angle un cercle fixe O aux extrémités des cordes fixes X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, leur centre radical décrit la perpendiculaire abaissée du point O sur la Pascale de l'hexagone $X_1X_2X_3Y_1Y_2Y_3$.

(*) On doit associer convenablement les points X et Y, de manière à obtenir, par exemple, angle $Z_1X_1X_2 = Z_2X_2X_1$.

Digitized by Google

En particulier, si l'on fait coïncider X_1 et X_2 en un point A, X_3 et Y_1 en un point B, Y_2 et Y_3 en un point C du cercle O, la Pascale de l'hexagone devient l'axe d'homologie du triangle ABC et de son polaire réciproque, ou la droite de Lemoine de triangle ABC, et la perpendiculaire abaissée de O sur cette droite se confond avec OK.

ÉCOLE NAVALE.

Concours de 1887.

1. Calculer les valeurs de x comprises entre 0° et 360° qui satisfont à l'équation

$$\operatorname{tg}^3(3x+12^\circ) = \frac{23{,}3382\sqrt{\sin 177^\circ 12' 18''}}{(0{,}017045)^2 \operatorname{tg}^4 84^\circ 30' 48'' \sin^7 244^\circ 18' 12''}.$$ (Une heure).

2. Démontrer que si l'on désigne par R la partie entière de la racine carrée d'un nombre entier, par r le reste et par n la partie entière du quotient $(2R : r)$; la racine exacte est comprise entre $R+\frac{1}{n}$, $R+\frac{1}{n+1}$.

En posant

$$\sqrt{R^2+r} = R+\frac{1}{x}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{\sqrt{R^2+r}-R} = \frac{\sqrt{R^2+r}+R}{r},$$

on voit que x est compris entre $\frac{2R}{r}$ et $\frac{2R+1}{r}$.

3. Étant donnée l'équation

$$\lambda(x^2 - ax) - ay(x - y - a) = 0, \qquad (1)$$

dans laquelle a désigne une quantité constante positive, et λ un paramètre variable, on demande : 1° de déterminer la nature des diverses courbes que peut représenter cette équation lorsque λ varie de $-\infty$ à ∞; 2° de démontrer qu'elles passent par trois points fixes et que le lieu de leurs centres est une droite; 3° de construire pour une valeur donnée de λ, le centre de la courbe et les tangentes aux trois points fixes; 4° De trouver le lieu géométrique des points de ces courbes où les tangentes sont parallèles à l'axe des x.

On peut écrire

$$2y = x - a \pm \sqrt{\left(1-\frac{4\lambda}{a}\right)(x-a)\left(x-\frac{a^2}{a-4\lambda}\right)}. \qquad (2)$$

Digitized by Google

Construisons le diamètre représenté par $2y = x - a$. A cet effet, prenons sur Ox le segment $OA = a$, et sur l'axe des y négatifs le segment $OB = a$; soit C le milieu de OB. AC est le diamètre cherché. Celui-ci rencontre la courbe aux points qui ont pour abscisses a et $[a^2 : (a - 4\lambda)]$; le premier point est A et ne dépend pas de λ. Désignons par D le deuxième point, et par AA′ une parallèle à OY; AA′ est une tangente fixe et O, B sont des points fixes de la conique. Si D est du côté des abscisses négatives (ou si $\lambda > \frac{1}{4}a$), la courbe est une ellipse. Si D coïncide avec C (ou si $\lambda = \infty$), la courbe se réduit aux deux parallèles OY, AA′. Dans le cas de $\lambda < \frac{1}{4}a$, D a une abscisse positive et la courbe est une hyperbole, qui se réduit aux droites AO, AB, lorsque D est en A (ce qui correspond à $\lambda = 0$). L'hypothèse $\lambda = \frac{1}{4}a$ transporte le point D à l'infini et correspond à une parabole.

Le lieu du centre est, visiblement, le diamètre AC.

Les tangentes en O et B rencontrent le diamètre AC au même point T, conjugué harmonique de C par rapport à A et D.

L'équation du lieu 4° résulte de l'élimination de λ entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à x. On trouve : 1° $y = 0$, ou l'axe des x qui correspond à $\lambda = 0$ (système des droites AO, AB); 2° $x(x - a) - (2x - a)(x - y - a) = 0$, équation d'une hyperbole dont les asymptotes ont pour équations $x = \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}a$.

4. Etant données les deux droites OA et OB′, la première OA située dans le plan horizontal et faisant avec la ligne de terre xy un angle de 40°, la seconde OB′ située dans le plan vertical et faisant avec xy un angle de 50°, on demande : 1° de tracer les projections OC, OC′ d'une droite faisant avec OA un angle de 70°, avec OB′ un angle de 45° et située par rapport au plan AOB′ du même côté que Ox; 2° de tracer les projections de l'axe du cône de révolution passant par les droites OA, OB′ et la droite (OC, OC′) précédemment déterminée.

(Une heure et demie).

Pour la première partie, on peut faire deux changements de plans de projection : substituer au plan vertical un plan perpendiculaire à la droite OA, et remplacer ensuite le plan horizontal par le plan AOB′. La question revient alors à représenter un trièdre dont une face est donnée dans un plan de projection et dont les autres faces sont connues en grandeur. — Pour la deuxième partie, on peut prendre sur les arêtes du trièdre, à partir de O, trois longueurs égales et chercher le centre de la circonférence passant par les extrémités de ces longueurs, ce qui se fait facilement au moyen du rabattement du plan de la circonférence.

Digitized by Google

FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE DE WEIERSTRASS(*).

M. WEIERSTRASS a fait connaître, dans le *Journal de Crelle*, 1874, t. 79, pp. 29-31, puis dans ses *Abhandlungen aus der Functionenlehre* (Berlin, Sprenger, 1886), pp. 97-101, une fonction continue sans dérivée, fonction qui est représentée par une série assez simple. Nous traduisons l'article de l'éminent géomètre, afin de donner à nos lecteurs au moins un exemple de ces singulières fonctions.

1. *Fonction continue sans dérivée.* « Soient x une variable réelle, a un nombre entier impair, b une constante positive, inférieure à l'unité, et

$$fx = \cos \pi x + b \cos a\pi x + b^2 \cos a^2\pi x + b^3 \cos a^3\pi x + \text{etc.}$$

Cette fonction fx est continue (**). Nous allons montrer que, si ab est suffisamment grand, fx n'a de dérivée pour aucune valeur de x.

Soit x_0 une valeur déterminée quelconque de x, m un nombre entier positif. On peut déterminer un nombre entier α_m, positif ou négatif, tel que la différence

$$x_{m+1} = a^m x_0 - \alpha_m$$

soit comprise entre $-\frac{1}{2}$ exclusivement et $+\frac{1}{2}$ inclusivement [Il suffit, pour cela, si $a^m x_0$ n'est pas entier, de prendre pour α_m le plus grand

---

(*) Extrait du *Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand*, par P. MANSION, ouvrage qui paraît en même temps que la présente livraison de *Mathesis*.

(**) Cette série est convergente, parce qu'elle est déduite de la progression convergente $1 + b + b^2 + \text{etc}$, en en multipliant les termes par des quantités $\cos \pi x$, $\cos a\pi x$, etc., comprises entre -1 et $+1$. Elle est continue. En effet, posons

$$fx = \varphi x + \psi x, \quad \varphi x = \cos \pi x + b \cos a\pi x + \cdots + b^{m-1} \cos a^{m-1}\pi x;$$
$$\psi x = b^m \cos a^m \pi x + b^{m+1} \cos a^{m+1}\pi x + \text{etc.}$$

On aura $\Delta fx = \Delta\varphi x + \psi(x + \Delta x) - \psi x$. Or, ψx et $\psi(x + \Delta x)$, en valeur absolue, sont inférieures à la progression indéfinie $b^m + b^{m+1} + b^{m+2} + \text{etc.}$, ou à $[b^m : (1 - b)]$. Pour m suffisamment grand, $[b^m : (1 - b)]$ est inférieur à $\frac{1}{3}\varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut; donc $\Delta\psi x$ est inférieur à $\frac{2}{3}\varepsilon$. Une fois m ainsi choisi, on peut prendre Δx suffisamment voisin de zéro, pour que l'accroissement $\Delta\varphi x$ de la fonction φx, qui est continue comme somme de fonctions continues, soit, en valeur absolue, inférieure aussi à $\frac{1}{3}\varepsilon$. Donc enfin, encore en valeur absolue, Δfx est inférieur à ε; autrement dit, fx est une fonction continue.

Digitized by Google

entier immédiatement inférieur ou supérieur à $a^m x_0$, et, si $a^m x_0$ est entier, de faire, $\alpha_m = a^m x_0$]. Posons maintenant

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m}.$$

On aura

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m}.$$

Donc $x' < x_0 < x''$, et, en prenant m assez grand, x' et x'' s'approcheront de x_0 autant qu'on le voudra.

On a maintenant

$$\frac{fx' - fx_0}{x' - x_0} = \frac{\cos \pi x' - \cos \pi x_0}{x' - x_0} + b \frac{\cos a\pi x' - \cos a\pi x_0}{x' - x_0}$$

$$+ b^2 \frac{\cos a^2 \pi x' - \cos a^2 \pi x_0}{x' - x_0} + \text{etc.} =$$

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} (ab)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} + \sum_{n=0}^{n=\infty} b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos a^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0}.$$

Or

$$\frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} = -\pi \sin \tfrac{1}{2} a^n \pi (x' + x_0) \frac{\sin \frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}{\frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)},$$

quantité où le produit des deux derniers facteurs est compris entre -1 et $+1$ exclusivement.

On a donc, en valeur absolue,

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} (ab)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} < \sum_{n=0}^{n=m-1} \pi (ab)^n < \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m.$$

Ensuite, puisque a est un nombre entier impair,

$$\cos a^{m+n} \pi x' = \cos a^n (\alpha_m - 1) \pi = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos a^{m+n} \pi x_0 = \cos a^n (\alpha_m \pi + \pi x_{m+1}) = (-1)^{\alpha_m} \cos a^n \pi x_{m+1}.$$

On a donc, en observant que $a^m (x' - x_0) = -(1 + x_{m+1})$,

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos a^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \frac{1 + \cos a^n \pi x_{m+1}}{1 + x_{m+1}}.$$

Aucun des termes compris sous le dernier signe S n'est négatif; le

Digitized by Google

premier $(1 + \cos \pi x_{m+1}) : (1 + x_{m+1})$, a son numérateur au moins égal à 1 ; car x_{m+1} est compris entre $-\frac{1}{2}$ exclusivement et $+\frac{1}{2}$ inclusivement; le dénominateur est au plus égal à $1\frac{1}{2}$ Donc le premier terme compris sous le dernier signe S est au moins égal à $\frac{2}{3}$.

On a donc enfin

$$\frac{fx' - fx_0}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{ab - 1}\right),$$

où η est une quantité supérieure à l'unité, tandis que ε est compris entre -1 et $+1$.

On trouve de même

$$\frac{fx'' - fx_0}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{ab - 1}\right),$$

où η_1 est, comme η, une quantité positive, supérieure à l'unité, ε_1 une quantité comprise entre -1 et $+1$.

Prenons a et b tels que ab surpasse $1 + \frac{3}{2}\pi$; alors on a

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1};$$

par suite, les rapports

$$\frac{fx' - fx_0}{x' - x_0}, \quad \frac{fx'' - fx_0}{x'' - x_0},$$

ont des signes contraires et, en valeur absolue, deviennent l'un et l'autre aussi grands qu'on le veut, pour m croissant indéfiniment.

Il résulte immédiatement de là que fx n'a, pour $x = x_0$, ni une dérivée finie, ni une dérivée infinie positive, ni une dérivée infinie négative. »

2. ***Réponse à une objection.*** Une étude de M. Wiener sur la fonction fx (*Journal de Crelle*, 1881, t 90, p 221-252 : ***Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstrasschen Function***) ayant causé certains malentendus relatifs à la conclusion précédente, M. Weierstrass a ajouté à sa note primitive, les explications suivantes « qui assurément dit-il, sont superflues pour la plupart des lecteurs. »

« Pour qu'une fonction continue Fx d'une variable réelle x ait ***une*** dérivée finie, pour $x = x_0$, il n'est pas suffisant, mais il est nécessaire que toutes les valeurs du rapport $[(Fx - Fx_0) : (x - x_0)]$, soient comprises entre deux limites finies, une fois que l'on a fixé une limite que $x - x_0$

Digitized by Google

ne peut dépasser. La fonction fx du n° précédent ne satisfait jamais à cette condition de quelque manière que l'on choisisse x_0.

Pour que Fx ait, pour $x = x_0$, une dérivée infinie positive (ou négative), il faut que, pour $x - x_0$ suffisamment petit en valeur absolue, inférieur à g, par exemple, le rapport $R = [(Fx - Fx_0) : (x - x_0)]$ soit supérieur à une quantité positive G (ou inférieur à une quantité négative — G), G étant aussi grand qu'on le veut; ce rapport R, pour $x - x_0$ inférieur à g, en valeur absolue, ne peut plus varier qu'entre G et $+\infty$ (ou entre — G et $-\infty$). Une condition nécessaire de l'existence d'une dérivée de Fx infinie positive (ou négative) pour $x = x_0$, c'est donc que le rapport R conserve toujours le même signe, pour les valeurs de x suffisamment voisines de x_0. La fonction fx, comme on l'a vu, ne vérifie pas cette condition. Cette fonction n'a donc de dérivée déterminée, ni finie, ni infinie, pour aucune valeur de x.

Les objections de M. Wiener reposent sur un malentendu qu'il est facile de dissiper. Pour certaines valeurs de x_0, on peut parfaitement déterminer une série indéfinie de valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$, telles que $\lim x_n = x_0$, pour $n = \infty$, et en même temps telles que le rapport $[(fx_n - fx_0) : (x_n - x_0)]$ ait une limite déterminée. Mais il n'est pas permis de conclure de là que fx a une dérivée pour cette valeur $x = x_0$; car, en raisonnant de même, on pourrait soutenir que, par exemple, $Fx = x \sin(x + x^{-1})$ a une dérivée nulle pour $x = 0$, parce que, si l'on fait $x_n^{-1} = n\pi$, $\lim x_n = 0$ et $\lim (Fx_n : x_n) = 0$, pour $n = \infty$, » [ce qui est absurde. En effet, en faisant tendre x d'une manière quelconque vers zéro, $(Fx : x) = \sin(x + x^{-1})$ n'a évidemment aucune limite déterminée].

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Analyse infinitésimale, par PH GILBERT, professeur à l'Université catholique de Louvain. Partie élémentaire. Deuxième édition. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Un vol. gr. in-8° de XII-552 pages. Prix : 9-50.

Nous nous empressons d'annoncer à nos lecteurs cette nouvelle édition du *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. Gilbert L'ouvrage de notre savant collègue de Louvain contient, en un seul volume, le Calcul différentiel et le Calcul intégral (quadratures et équations différentielles), avec les applications habituelles à la théorie générale des courbes et des surfaces et à la géométrie de la mesure. Des exercices nombreux et bien choisis terminent chaque chapitre et permettent à

Digitized by Google

l'étudiant, sans qu'il doive recourir à aucun autre ouvrage, de s'assurer, par un travail personnel, s'il s'est assimilé les théories du livre.

Comme il le dit dans la preface, l'auteur a fait subir à son *Cours* des modifications assez profondes : « Les chapitres concernant la théorie des limites, les séries, les fonctions et leurs dérivées en général, la théorie des points singuliers, les surfaces réglées, les fonctions d'une variable imaginaire, les intégrales simples ou doubles, etc., etc., ont été complètement refondus. » ... « Depuis une vingtaine d'années, des écrits nombreux ont eu pour but de présenter d'une manière plus précise et plus rigoureuse les théories de l'analyse infinitésimale; il y avait donc lieu de chercher à introduire ces améliorations dans notre enseignement. »

Autant que nous avons pu en juger, en parcourant rapidement le nouveau Cours, il nous semble que M. Gilbert a réussi à exposer les principes fondamentaux de l'analyse, avec la rigueur qui comporte l'état actuel de la science. Nous avons vu, avec plaisir, que sur plus d'un point (par exemple, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire), le savant géomètre a admis le mode d'exposition défendu par nous dans *Mathesis* et ailleurs. (P. M)

Sur le théorème de Stewart, par Cl. Thiry, *étudiant à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand* (Extrait de la *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, t. XXX, 1887). Gand, Hoste, 1887, 16 pages in-8°. Prix : 50 centimes.

Le théorème de Stewart établit une relation entre les distances de trois points en ligne droite A, B, C à un quatrième point quelconque; il est exprimé par l'égalité

$$\overline{OA}^2.BC + \overline{OB}^2.CA + \overline{OC}^2.AB + BC.CA.AB = 0. \qquad (1)$$

Cette propriété, dit Chasles dans l'*Aperçu historique* (pp. 175-176), *mériterait bien de prendre place dans les éléments ou du moins dans les compléments de géométrie*. Ses applications au barycentre et à certains lieux géométriques sont, d'après Steiner (*Gesammelte Werke*, t II, p. 111), éminemment propres à éveiller l'intérêt des élèves et à stimuler leur travail personnel.

Jugeant que, chez nous, le théorème de Stewart est trop négligé, M. Cl. Thiry a cru rendre service à l'enseignement en publiant une monographie sur cette proposition. Les deux démonstrations qu'il en présente sont nouvelles et n'empruntent pas le théorème de Pythagore, ce qui leur donne un certain intérêt. La première s'appuie sur l'expression du produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible; la seconde est fondée sur un lemme qui ne diffère que par la forme de la relation entre des parallèles menées par trois points en ligne droite et limitées à une seconde droite. L'auteur examine les cas particuliers les plus remarquables du théorème de Stewart, et le fait servir à la détermination de la somme $\alpha.\overline{OA}^2 + \beta.\overline{OB}^2 + \gamma.\overline{OC}^2 + \ldots$, où A, B, C, ... sont des points donnés et $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ des constantes données; l'opuscule est terminé par quelques lieux géométriques se rattachant à la formule (1).

Nous recommandons volontiers le travail de M. Thiry aux élèves, tout en expri-

Digitized by Google

mant le regret que la place ait manqué à l'auteur pour introduire, dans sa monographie, *toutes* les démonstrations du théorème de Stewart et les généralisations signalées par Chasles (*Géométrie supérieure*, p. 233); les applications développées auraient pu aussi être plus nombreuses et être suivies d'exercices proposés.

(J. N.)

Décomposition en facteurs des expressions algébriques, par J. Demeyst et A. Knops, professeurs à l'Athénée royal d'Ath. Bruxelles, L. Charpentier, 1887. Une brochure in-12 de 28 pages. Prix : 60 centimes.

Décomposition des binômes $x^n \pm a^n$; des trinômes $ax^2 + bx + c$, $ax^{2n} + bx^n + c$; des polynômes (au fond, recherche des racines entières des équations numériques). La règle d'exclusion de Newton, donnée, page 24, pourrait être exposée plus simplement en faisant $x = \pm 1$, dans l'identité $f(x) = A_0(x - a)(x - b)$.... N'aurait-il pas fallu ajouter aussi la recherche des facteurs de la forme $mx + n$, autrement dit, celle des racines fractionnaires des équations numériques? En général, n'y aurait-il pas avantage à traiter, en algèbre élémentaire, la décomposition des polynômes en facteurs, sous son vrai nom : Recherche des racines entières ou fractionnaires des équations de degré supérieur?

PROPRIÉTÉS DU CONTREPARALLÉLOGRAMME.

On appelle *contreparallélogramme* un quadrilatère étoilé ABCD dont les côtés opposés sont égaux; ou, si l'on veut, un trapèze isoscèle dans lequel on considère les côtés non parallèles AB, CD et les diagonales AD, BC; les bases AC, BD du trapèze sont les *diagonales* du contreparallélogramme: Voici les principales propriétés de cette figure.

1° Le produit des diagonales est égal à la différence des carrés des côtés AC, AD.

2° Une parallèle aux diagonales AC, BD rencontre les côtés AB, BC, CD, DA en des points α, β, γ, δ tels que l'on a

$$\alpha\delta \cdot \alpha\beta = A\delta \cdot D\delta - A\alpha \cdot B\alpha.$$

3° Le contreparallélogramme est circonscriptible à deux cercles dont les centres sont sur la circonférence ABCD.

Réciproquement, si deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, les tangentes communes extérieures sont coupées par les tangentes communes intérieures en quatre points situés sur la circonférence qui a pour diamètre la distance des centres des deux cercles.

4° La distance des points où un côté du contreparallélogramme touche les deux cercles inscrits est égale à l'autre côté.

Digitized by Google

5° Le produit des diamètres des deux cercles inscrits est égal au produit des diagonales.

6° La somme des deux diagonales est à leur différence comme la tangente du demi-angle des côtés intérieurs AD, BC est à la tangente du demi-angle des côtés extérieurs(*).

SUR LES NOMBRES PARFAITS;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 100-101, 145-148, 178, 248-250.)

Théorème I. *Tout nombre parfait pair autre que* 6 *est un multiple de* 9, *plus un.*

Les nombres parfaits pairs autres que 6 étant de la forme $2^m(2^{m+1}-1)$, où $m+1$ est un nombre premier impair, peuvent s'écrire

$$4^n(2 \cdot 4^n - 1)$$

Or, on a, comme on le voit aisément,

$$4^n = 9M+4, \quad \text{ou} \quad 9M-2, \quad \text{ou} \quad 9M+1.$$

Donc, un nombre parfait pair, autre que 6, aura l'une ou l'autre des expressions suivantes :

$$(9M+4)(18M+7) = 162M^2+135M+28 = \mathcal{M}9+1,$$
$$(9M-2)(18M-5) = 162M^2-81M+10 = \mathcal{M}9+1,$$
$$(9M+1)(18M+1) = 162M^2+27M+1 = \mathcal{M}9+1.$$

Théorème II. *Les nombres parfaits pairs sont terminés par* 6 *ou par* 28(**). Supposons n pair dans la formule précédente; alors 4^n est terminé

(*) Voir Dostor, N. A. M, 1867, (2) VI, p. 57.

(**) M. Novarese, professeur à l'Université de Turin, nous a aussi envoyé la démonstration des théorèmes I, II et de leurs conséquences, et il nous a fait remarquer que M. Carvallo (C. R., 1875, LXXXI, pp. 73-75) a énoncé les théorèmes I, II et les conséquences I, II, en se bornant toutefois à observer que si n est impair, le nombre parfait se termine par 8. (P. M.)

Digitized by Google

par 6, et $2.4^n - 1$ est terminé par 1; donc leur produit sera terminé par 6.

Supposons n impair; alors 4^n sera terminé par 04, 64, 24, 84 ou 44 et $2.4^n - 1$ le sera par 07, 27, 47, 67 ou 87; donc les deux derniers chiffres de leur produit sont ceux qui terminent 4×7, 64×27, 24×47, 84×67 ou 44×87, c'est-à-dire 28.

Conséquences. I. *Tout nombre parfait terminé par un* 6, *diminué de l'unité, est un multiple de* 45; car cette différence est à la fois divisible par 9 (th. I) et par 5.

II. *Le nombre des centaines d'un nombre parfait terminé par* 8 *est un multiple de* 9. En effet, d'après les théorèmes I, II, il est de la forme $100N + 27 + 1$ et diminué de 1, il est divisible par 9; donc N est divisible par 9.

III. *Tout nombre parfait terminé par* 8 *est un multiple de* 30 *diminué de deux unités*. En effet, $100N + 28 + 2 = 100N + 30$, où N est multiple de 9, est évidemment multiple de 30.

Théorème III. *Il n'existe aucun nombre parfait impair ne contenant qu'un ou deux facteurs premiers élevés à des puissances quelconques*. En effet, 1° si un nombre parfait N contenait un seul facteur a à la puissance α, on devrait avoir

$$2a^\alpha = 1 + a + \cdots + a^\alpha,$$

ce qui est une impossibilité, le second membre ne pouvant être un multiple de a.

2° Si $N = a^\alpha b^\beta$, on a

$$2a^\alpha b^\beta = (1 + a + \cdots + a^\alpha)(1 + b + \cdots + b^\beta).$$

Par suite,

$$1 + a + \cdots + a^\alpha = b^\beta, \quad \text{ou} \quad a^{\alpha+1} - 1 = b^\beta (a - 1).$$
$$1 + b + \cdots + b^\beta = 2a^\alpha, \quad \text{ou} \quad b^{\beta+1} - 1 = 2a^\alpha (b - 1).$$

On tire de là, par soustraction,

$$(2a^\alpha - b^\beta)(a + b - 1) = a^{\alpha+1}; \qquad (1)$$

donc $a^{\alpha+1}$ devrait diviser $a + b - 1$. Or, on a

$$a \gtreqless 3, \quad 2a^\alpha > b^\beta, \quad a^{\alpha+1} \geqq 3a^\alpha > a^\alpha + b^\beta > a + b - 1,$$

donc la relation (1) est impossible.

Digitized by Google

REMARQUE. Si $a = 2$, on trouve $b = 2^{\alpha+1} - 1$, $\beta = 1$, et les égalités précédentes sont vérifiées.

THÉORÈME IV. *S'il existe des nombres parfaits impairs contenant trois facteurs premiers, deux de ces facteurs seront* 3 *et* 5(*). En effet, d'après la définition des nombres parfaits,

$$2N = 2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} < \frac{a^{\alpha+1}b^{\beta+1}c^{\gamma+1}}{(a-1)(b-1)(c-1)}.$$

Donc

$$2\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) < 1.$$

Or, si deux des facteurs a, b, c ne sont pas 3 et 5, le premier membre est toujours plus grand que l'unité; donc, etc.(**). On démontre de même que s'il existe un nombre parfait contenant quatre facteurs, l'un de ces facteurs sera 3 ou 5.

NOTE. Les théorèmes 1°, 2° sur les nombres parfaits, donnés t. VI, p. 250, se trouvent énoncés aux n^os 27, 28 et le théorème 3° aux n^os 31, 32 des *Exercices* sur le chapitre X des *Questions d'Algèbre élémentaire* de MM. DESBOVES, Paris, Delagrave, 1878. L'auteur cite encore le théorème suivant :

Un nombre impair, divisible par n nombres premiers différents, ne peut être parfait, si le plus petit de ses facteurs premiers est supérieur à 2^n.

Il rapporte également des propositions dues à Descartes et à Frénicle, relatives à des nombres qui sont égaux à la moitié ou au quart de la somme de leurs parties aliquotes.

M. CATALAN nous adresse, à propos des nombres parfaits, la remarque suivante : « *La somme des inverses des diviseurs d'un nombre parfait est égale à* 2. » Le nombre lui-même est compté parmi ses diviseurs.

(*) M. E. WASTEELS, élève de l'École normale des Sciences de Gand, a aussi démontré ce théorème, mais d'une manière moins simple.

(**) Si $a = 3$, $b = 5$, on trouve que l'on doit avoir $2(3-1)(5-1)(c-1) < 15c$ ou $16c - 16 < 15c$, ou $c = 7$, 11 ou 13.

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 232.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 72.)

Trouver le lieu des normales à un ellipsoïde, parallèles à un plan donné. (H. BROCARD.)

Solutions par MM. MOSNAT *et* FALISSE. Les plans tangents qui correspondent à ces normales sont perpendiculaires au plan donné, et enveloppent un cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; leurs points de contact se trouvent donc sur une certaine ellipse E. La question 232 est donc identique au problème suivant : Trouver la surface lieu des droites qui rencontrent normalement une ellipse E et qui sont parallèles à un plan fixe P.

Prenons pour axes des coordonnées les axes de symétrie de E et une perpendiculaire à leur plan. Si $(x', y', 0)$ sont les coordonnées d'un point de E, et (α, β, γ) les angles directeurs d'une normale au plan P, les équations d'une génératrice de la surface considérée sont

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'), \tag{1}$$

$$(x - x')\cos\alpha + (y - y')\cos\beta + z\cos\gamma = 0, \tag{2}$$

avec la condition

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Entre les égalités (1), (2), (3), il faut éliminer x', y'. On peut tirer y' de (2), en substituer la valeur dans (1) et (3), puis éliminer x' entre les deux nouvelles équations, lesquelles sont du second degré en x'. La surface cherchée est du quatrième ordre(*).

(*) Les génératrices de la surface sont tangentes au cylindre qui a pour section droite la développée de E. Il serait intéressant d'étudier la courbe de contact de ce cylindre avec la surface proposée. (J. N.)

Digitized by Google

Question 400.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 248.)

Une hyperbole variable a, avec une ellipse fixe, un système de diamètres conjugués communs en grandeur et en position. Trouver le lieu des foyers de l'hyperbole. (MANTEL.)

Solution par M. MANTEL(*). Soient CC', DD' deux diamètres conjugués quelconques de l'ellipse, et M, N les points de rencontre de la tangente en C avec les tangentes en D et D'. Le foyer F de l'hyperbole qui a pour diamètres conjugués OC, OD est situé sur la bissectrice de l'angle MON. Posons $OF = \rho$, angle $FOX = \theta$, angle $MON = 2\varphi$. On a les trois équations

$$OM.ON = \rho^2, \quad OM.ON \sin 2\varphi = 2ab, \quad \operatorname{tg}(\theta + \varphi)\operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{-b^2}{a^2},$$

dont la première résulte de l'équation de l'hyperbole sous la forme $xy = \frac{1}{4}c^2$, et dont les deux autres expriment que OC et OD sont des diamètres conjugués de l'ellipse. On en tire

$$\sin 2\varphi = \frac{2ab}{\rho^2}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\theta},$$

d'où, en éliminant φ,

$$\frac{4a^2b^2}{\rho^2} + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \cos^2 2\theta = 1.$$

Telle est l'équation polaire du lieu cherché. En coordonnées rectangulaires, on a :

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2.$$

Solution d'après M. DÉPREZ. Soient $(\pm a\cos\varphi, \pm b\sin\varphi)$, $(\mp a\sin\varphi,$

(*) Nous empruntons cette belle solution aux *Wiskundige Opgaven*, deel II, p. 300. Ce recueil a publié une seconde solution, également remarquable, due à M. Kluyver. Celle-ci nous a suggéré une simplification de la solution de M. Déprez; le changement consiste à prendre pour paramètre variable l'anomalie du point C au lieu du coefficient angulaire du diamètre OC. (J. N.)

Digitized by Google

$\pm b\cos\varphi$) les coordonnées des extrémités de deux diamètres conjugués CC′, DD′. Les tangentes en ces points ont pour équations

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=\pm 1,\quad -\frac{x}{a}\sin\varphi+\frac{y}{b}\cos\varphi=\pm 1;$$

si l'on élimine entre ces égalités le terme connu, on trouve les équations des diagonales OM, ON du parallélogramme formé par ces tangentes, savoir

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi\pm\left(-\frac{x}{a}\sin\varphi+\frac{y}{b}\cos\varphi\right)=0.$$

Soient P, Q les premiers membres de ces équations. Les droites OM, ON étant les asymptotes d'une hyperbole de la question, l'équation de cette conique est de la forme $PQ=k^2$, où l'on détermine k par la condition que la courbe passe par le point C; on obtient ainsi

$$\left(\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi\right)^2-\left(\frac{x}{a}\sin\varphi-\frac{y}{b}\cos\varphi\right)^2=k^2,$$

ou

$$f(x,y)\equiv\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\cos 2\varphi+\frac{2xy}{ab}\sin 2\varphi-1=0.$$

Les coordonnées du foyer vérifient les équations (*)

$$f'_x f'_y-2\mathrm{B}f(x,y)=0,\quad f'^2_x-f'^2_y+4(\mathrm{A}-\mathrm{C})f(x,y)=0;$$

donc

$$xy=ab\sin 2\varphi,\quad x^2-y^2=(a^2+b^2)\cos 2\varphi.$$

Éliminons φ entre les égalités, etc.

(*) L'équation focale exprime que les tangentes issues du foyer ont pour coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$. Or, si l'on transporte l'origine des coordonnées au point (α,β), l'équation de la courbe devient

$$\mathrm{A}y^2+\mathrm{B}xy+\mathrm{C}x^2+xf'_\alpha+yf'_\beta+f(\alpha,\beta)=0,$$

et les abscisses des points de rencontre de la courbe avec la droite représentée par $y=mx$ sont données par la relation

$$x^2(\mathrm{A}m^2+\mathrm{B}m+\mathrm{C})+x(f'_\alpha+mf'_\beta)+f(\alpha,\beta)=0.$$

Pour que la droite soit tangente, il faut que l'on ait

$$(f'_\alpha+mf'_\beta)^2-4(\mathrm{A}m^2+\mathrm{B}m+\mathrm{C})f(\alpha,\beta)=0.$$

La nouvelle origine sera un foyer, si cette équation est vérifiée par $m=\sqrt{-1}$.

Digitized by Google

×Question 466.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

Si ABCD *est un quadrilatère inscrit dans un cercle* O, *démontrer que les perpendiculaires menées par* D *sur* DA, DB, DC *rencontrent respectivement* BC, AB, CA *en trois points* A', B', C' *en ligne droite avec le centre* O.

(Farisano.)

Solution par MM. Boedt, Servais et Verniory. Soient A'', B'', C'' les points diamétralement opposés à A, B, C. Dans l'hexagone inscrit A''ACBB''D, les points d'intersection O, B', A' des couples de côtés opposés (A''A, BB''), (AC, DB''), (CB, DA'') sont en ligne droite.

Généralisation par M. Servais. Un triangle ABC étant inscrit dans une conique, si par un point quelconque D on mène les cordes supplémentaires de DA, DB, DC, et qu'on prenne les intersections de ces cordes avec les côtés correspondants du triangle ABC, on obtient trois points situés sur un même diamètre de la conique.

Solution par MM. Farisano et Déprez. Transformons la figure par polaires réciproques en prenant pour conique directrice la circonférence qui a pour centre D et pour rayon DO. La circonférence donnée se transforme en une parabole P qui a pour foyer D et pour directrice la perpendiculaire menée en O sur DO. Les points A, B, C se transforment en trois tangentes de P. Les hauteurs du triangle de ces tangentes se coupent sur la directrice. Or les pôles de ces hauteurs sont les intersections de BC, CA, AB avec les perpendiculaires élevées en D sur DA, DB, DC; donc les points A', B', C' sont en ligne droite avec le pôle de la directrice de P, c'est-à-dire avec le point O.

Solution analytique. Soient $x^2 + y^2 = 1$ l'équation de la circonférence ABCD, et $(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$, ... les coordonnées des points A, B, C, D. Les droites AB, DC' sont représentées par

$$x\cos(\alpha+\beta) + y\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$
$$x\sin(\gamma+\delta) - y\cos(\gamma+\delta) = \sin(\gamma-\delta).$$

En ajoutant ces équations multipliées par $\sin(\gamma-\delta)$, $-\cos(\alpha-\beta)$, on obtient l'équation d'une droite passant par l'origine et par le point de concours de AB et DC'. Le résultat est symétrique en α, β, γ; donc etc.

(J. N.)

Autre solution analytique par M. Déprez, qui prend pour axes DC et DC'.

Digitized by Google

Question 540.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 240.)

On donne deux circonférences O, O'. *Une troisième* O'', *variable, touche les précédentes en* A, A'. *Menons la droite* OA *qui rencontre* O'' *en un nouveau point* B. *Le lieu du conjugué harmonique de* O *par rapport à* AB *est un limaçon de Pascal.* (Gob.)

Solution par M. Mandart. Soit C le conjugué harmonique de O par rapport à AB. On a, par une propriété de la division harmonique,

$$\frac{1}{OC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}\right). \qquad (1)$$

Transformons la figure par inversion en prenant pour pôle le point O. Si C_1, A_1, B_1 sont les inverses de C, A, B, la relation (1) devient

$$OC_1=\tfrac{1}{2}(OA_1+OB_1),$$

de sorte que C_1 est le milieu de A_1B_1. Mais, dans l'inversion, les cercles O, O', O'' se transforment en trois nouveaux cercles dont le troisième, variable, touche les deux autres; OA reste la ligne des centres des inverses des cercles O, O''. Donc C_1 est le centre de l'inverse du cercle O''. Ce point décrit donc une conique ayant pour foyers le point O et l'inverse du point O'; le point C décrit l'inverse de cette conique ou un limaçon de Pascal.

Solution par MM. Verniory, Demoulin, Boedt, Déprez. Soient $OC=\rho$, angle $COO'=\theta$, $OA=r$, $O'A'=r'$, $O''A=r''$, $OO'=d$. On a

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+2r''}\right),$$

$$(r'+r'')^2=(r+r'')^2+d^2-2d(r+r'')\cos\theta.$$

Si l'on élimine r'', on a un résultat de la forme

$$\rho=A+B\cos\theta.$$

Remarque. Soit D le conjugué harmonique de O'' par rapport au diamètre AOB' du cercle O. Comme on a $\overline{OA}^2=OD.OO''$, les points D et O'' décrivent des courbes inverses l'une de l'autre. Or le point O''

Digitized by Google

décrit une conique (O'') ayant pour foyer O; donc D décrit encore un limaçon de Pascal, et la polaire de O'' par rapport au cercle O enveloppe une courbe polaire réciproque de la conique (O''), c'est-à-dire une circonférence. (Boedt.)

Question 544.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 264.)

Mener en un point M *d'une ellipse deux cordes supplémentaires* MN, MP *également inclinées sur la normale* MR. *Trouver le lieu des pôles et l'enveloppe des cordes* MN, MR. (Concours de France, 1846).

Solution par MM. Brocard, Déprez, Meurice *et* Cl. Servais. Le diamètre NP est divisé harmoniquement par la normale MR et la tangente MT, bissectrices de l'angle NMP; soient S et T les points de division. On voit facilement que MR est la polaire de T; donc OT est le diamètre conjugué avec la corde normale MR, et S est le milieu de celle-ci.

Les tangentes en N et P, parallèles au diamètre conjugué avec NP, sont parallèles à MR; donc si elles rencontrent MT en n, p, les angles NnM, PpM sont droits. Le lieu de n et p est donc la circonférence orthoptique, c'est-à-dire la circonférence circonscrite au rectangle des axes.

L'enveloppe de MP est la polaire réciproque de cette circonférence par rapport à l'ellipse proposée; c'est donc une seconde ellipse. Pour obtenir son équation, on cherche l'enveloppe de la droite représentée par l'équation

$$a^2y.\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi + b^2x.\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi = a^2b^2;$$

on trouve

$$a^4y^2 + b^4x^2 = \frac{a^4b^4}{a^2+b^2}.$$

Le lieu est donc une ellipse homofocale avec la proposée, résultat presque évident si l'on observe que les droites MP et MN sont également inclinées sur les rayons vecteurs MF, MF'.

Digitized by Google

Question 551.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 24.)

Sur une base donnée AB ***on construit un triangle*** ABC ***tel que l'angle*** A = 2B. ***Soient*** AD ***la bissectrice de l'angle*** CAB, DE ***une parallèle à*** AB ***rencontrant*** CA ***en*** E. ***Démontrer géométriquement que les points*** C, E ***décrivent des coniques dont*** A ***est un foyer.*** (Gob.)

Solution par M. Laurens, Stuyvaert, Mandart, Emmerich, I. Beyens, (Cadix), Déprez, A. Droz (Porrentruy), Mosnat, Brocard (Grenoble), Cl. Thiry, Meurice, Hacken, Boedt, Klompers *et* Verniory. Le pied D de la bissectrice AD décrit la perpendiculaire au milieu O de AB. Le triangle EAD est visiblement, isoscèle; donc EA = ED, et le lieu de E est la parabole qui a pour foyer A et pour directrice OD.

Prolongeons AD de DC′ = DC. La figure ABC′C est un trapèze isoscèle, et l'on voit aisément que CA = CC′ = 2CH, H étant le point de rencontre de CC′ avec OD. Donc C décrit une hyperbole dont A est un foyer et OD la directrice correspondante. B est un sommet de la conique, car BA = 2BO; l'autre sommet divise AO dans le rapport 2 : 1. Les asymptotes ont une inclinaison de 60° sur AB.

Remarques. I. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Ce point, situé à l'intersection de AD avec la bissectrice de l'angle ABD satisfait à la relation : *angle* IAB = 2IBA. Donc il appartient à l'hyperbole décrite par C. De là une propriété très-curieuse de l'hyperbole dont les asymptotes font entre elles l'angle de 120°. (Meurice.)

II. La projection de C sur AD étant le milieu de AC′, décrit une courbe homothétique au lieu de C′, savoir une hyperbole ayant un sommet en A, un foyer en O et pour directrice correspondante la perpendiculaire élevée au milieu de AO.

L'orthocentre du triangle ABC et le centre du cercle des neuf points décrivent des quartiques. (Déprez.)

III. Si l'on fait une inversion de la figure en prenant A pour pôle, les inverses des points C et E décrivent respectivement un limaçon de Pascal et une cardioïde, courbes inverses d'une hyperbole et d'une parabole par rapport à un foyer. Ces résultats peuvent être établis directement. (Mandart.)

Digitized by Google

Question 552.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 24.)

Soit, dans le triangle ABC, M *un point tel que les angles* MAC, MBC' *soient égaux ; le lieu de ce point est une hyperbole équilatère* F_c (*Mathesis*, t. VI, pp. 57 et 58). *Désignons par* A', B', C' *les points de rencontre des droites* AM, BM, CM *avec les côtés de* ABC ; *par* B_c *et* A_c *les points où les parallèles à* MC *menées respectivement par* B' *et* A' *coupent* AB ; *par* C_b *le point de rencontre de* BC *avec la parallèle à* AA' *menée par* C' ; *enfin par* C_a *celui de* AC *avec la parallèle à* BB' *menée par* B'. *Cela posé :*

1° *Les quatre points* C_a, C_b, A_c, B_c *sont sur une même circonférence ;* 2° C_aC_b *est antiparallèle de* AB ; 3° C_aC_b *et* C_bA_c *sont respectivement parallèles à* CB *et* CA ; 4° *si* CC' *est la hauteur,* M *est l'orthocentre de* ABC, *point commun aux trois hyperboles* F_a, F_b, F_c *et les trois circonférences analogues à celle de* 1° *se confondent avec la circonférence de Taylor ;* 5° *la tangente en* C *à* F_c *est la symédiane issue de* C *et les tangentes en* A *et* B *ont pour direction la direction symétrique de* AB *par rapport à la bissectrice de l'angle* BCA. (E. Lemoine.)

Solution par M^lle^ S. Bouwmeester (Rotterdam) *et* MM. Boedt, Déprez, A. Droz *et* Meurice. 1°, 2° et 3°. Des proportions

$$\frac{CM}{CC'} = \frac{CB'}{CC_a} = \frac{CA'}{CC_b}$$

on déduit que C_aC_b est parallèle à A'B'.

Mais des angles égaux CAA', CBB', on conclut que B'A' et AB sont antiparallèles par rapport à l'angle BAC ; donc C_aC_b est antiparallèle de AB.

Les proportions

$$\frac{AC_a}{AB'} = \frac{AC'}{AB}, \quad \frac{AB'}{AC} = \frac{AB_c}{AB}$$

donnent, par multiplication,

$$\frac{AC_a}{AC} = \frac{AB_c}{AB};$$

donc B_cC_a est parallèle à CB. De même C_bA_c est parallèle à CA. Il résulte de là et de ce qui a été démontré, que $B_cC_aC_bA_c$ est un quadrilatère inscriptible.

Digitized by Google

4° Lorsque M est l'orthocentre, les angles CAM, CBM sont égaux; donc l'orthocentre est situé sur l'hyperbole F_c; celle-ci est donc équilatère. Dans ce cas, les points désignés par B_c, A_c, C_b, C_a sont les projections des pieds des hauteurs de ABC sur les côtés; ces points appartiennent donc à la circonférence de Taylor de ABC.

5° Dans une hyperbole équilatère, deux diamètres conjugués, et par suite, deux cordes supplémentaires, ont des directions symétriques par rapport à une asymptote. Réciproquement, deux droites AM et BM qui pivotent autour de deux points fixes A et B de manière que la bissectrice de leur angle ait une direction constante, se coupent sur une hyperbole équilatère. Donc l'hyperbole F_c a pour centre le milieu A_1 de AB et ses asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle ACB et de son adjacent supplémentaire. De plus, le diamètre A_1C et la tangente en C, le diamètre AB et la tangente en A (ou en B) sont également inclinés sur la bissectrice de ACB.

QUESTIONS D'EXAMEN(*).

334. Trouver trois nombres en progression arithmétique et qui soient divisibles respectivement par 4, 5, 7 (Analyse indéterminée).

335. Résoudre en nombres entiers le système

$$x+y+p=4(z+u+v),\quad y+z+p=5(u+v+x),$$
$$z+u+p=6(x+y+v),\quad v+u+p=7(x+y+z),$$
$$v+x+p=8(y+z+u).$$

336. Résoudre l'équation

$$1+\frac{1}{2}x=\frac{30}{x}-\frac{60}{x^2}+\frac{120}{x^3}-\frac{240}{x^4}+\frac{480}{x^5}-\cdots,$$

où le second membre se prolonge indéfiniment.

Même question pour l'équation

$$x^n=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots$$

337. Trouver trois nombres consécutifs qui soient respectivement divisibles par 7, 9, 11.

(*) Les questions 334-340 sont tirées du « Register op de Werken van het Wiskundig Genootschap *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.* »

Digitized by Google

288. Trouver la somme des n premiers termes de la suite

$$\frac{1^2}{1.3},\ \frac{2^2}{3.5},\ \frac{3^2}{5.7},\ \frac{4^2}{7.9},\ \cdots$$

Le n^e terme est

$$\frac{n^2}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{4}\frac{4n^2-1+1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

La somme demandée est donc

$$\frac{n}{4}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**588.** Résoudre le système d'équations

$$x^2-yz-zu-uy=a,\quad y^2-zu-ux-xz=b,$$
$$z^2-ux-xy-yu=c,\quad u^2-xy-yz-zx=d.$$

(DAWSON.)

×**589.** Dans tout triangle ABC,

$$c^n=a^n\cos nB+na^{n-1}b\cos[(n-1)B-A]$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\,2}a^{n-2}b^2\cos[(n-2)B-2A]+\cdots+b^n\cos nA.\ \text{(BRILL.)}$$

590. Construire une conique osculatrice à un cercle donné en un point donné A, connaissant la corde idéale commune à la conique et au cercle infiniment petit A. (E. DEWULF.)

×**591.** Deux points matériels pesants parcourent simultanément une même verticale. L'un d'eux a été abandonné à lui-même au point O de cette droite; l'autre a été lancé, quelque temps après, du même point, avec une vitesse initiale connue, dirigée de haut en bas et suffisante pour que les deux mobiles se rencontrent à une distance donnée a du point O. Combien de temps s'est-il écoulé entre les départs des deux mobiles? (V. JAMET.)

Ce problème, qui n'exige que la connaissance des formules de la pesanteur, donne lieu à une équation du second degré dont la discussion est assez intéressante.

×**592.** Étant donnés, dans l'espace, deux cercles, trouver le lieu d'un point qui soit le sommet commun de deux cônes semblables construits sur les deux cercles. (J. N.)

Digitized by Google

GÉNÉRATION LINÉAIRE DE QUELQUES COURBES A ÉLÉMENTS MULTIPLES;

par M. François Debuyts, Docteur en sciences physiques et mathématiques.

Soient deux points fixes A_1, A_2, et deux droites d_1 et d_2 se coupant au point A_3. Les jonctions de A_1 et A_2 à un point quelconque X déterminent sur les droites d_1 et d_2, respectivement, des points M_1 et M_2. Nous dirons que la droite

$$x \equiv (M_1 M_2)$$

correspond au point X, et, réciproquement, que le point X correspond à la droite x.

1. Si le point X décrit une droite, c'est-à-dire une courbe du premier ordre, la droite x enveloppera une courbe de la seconde classe, et si la droite x tourne autour d'un point fixe, c'est-à-dire enveloppe une courbe de la première classe, le point X décrira une courbe du second ordre. Ces théorèmes bien connus sont attribués, comme on le sait, à *Mac-Laurin* et à *Braikenridge*.

2. Supposons maintenant que la droite x enveloppe une courbe de la seconde classe Σ_2, et cherchons le lieu du point X correspondant.

Joignons tous les points D d'une droite quelconque d aux points A_1 et A_2; ces jonctions déterminent sur d_1 et d_2, deux séries projectives de points

$$D_1,\ D_1',\ D_1'',\ \ldots \text{ etc.},$$

et

$$D_2,\ D_2',\ D_2'',\ \ldots \text{ etc.}$$

Les droites qui unissent les points homologues enveloppent, d'après le théorème que nous venons de rappeler, une courbe de la seconde classe Σ_2', qui a, en commun avec la courbe Σ_2, quatre tangentes. Ces quatre tangentes correspondent, visiblement, aux points de la courbe, lieu du point X, situés sur la droite d. Cette courbe est donc du quatrième ordre.

Les points A_1 et A_2 sont des points doubles de cette ligne. En effet, joignons les points A_1 et A_2; cette droite coupe d_1 et d_2 en deux points C_1' et C_2'. Par C_1' et C_2' menons les tangentes à la courbe Σ_2; les points

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF
Digitized by Google

correspondants coïncideront, respectivement, avec A_2 et A_1. De même, si nous considérons les deux tangentes de la courbe C_2, passant par le point A_3, il est visible que les points correspondants du lieu coïncideront avec le point A_3.

On peut rechercher encore le lieu du point X de la manière suivante : Les tangentes $\overline{M_1M_2}$ à la courbe Σ_2, marquent sur les droites d_1 et d_2 deux séries de points (M_1), (M_2) formant une correspondance (2, 2). Les droites A_1M_1, A_2M_2, détermineront donc sur la transversale d, deux séries de points (N_1), (N_2) formant également une correspondance (2, 2). D'après le principe de Chasles, il y a quatre coïncidences, qui sont les points de rencontre de d avec le lieu cherché.

Cette méthode a l'avantage de faire ressortir immédiatement l'existence des points doubles. Elle nous montre également que les deux tangentes en chacun des deux points doubles A_1 et A_2 sont les droites A_1K_1, A_1K_1'; A_2K_2, A_2K_2'; K_1, K_1' et K_2, K_2' étant les points où les tangentes, menées à Σ_2 respectivement de C_2' et C', rencontrent d_1 et d_2.

Nous pouvons remarquer que, si de A_1 nous menons les deux tangentes à Σ_2, ces droites rencontrent la droite d_2 en deux points qui appartiennent à la courbe. La même chose aurait lieu évidemment pour le point A_2.

3. Si nous prenons les deux points A_1 et A_2 sur une tangente à Σ_2, il est évident que la quartique correspondante C_4 se décompose en cette tangente A_1A_2, et en une ligne du troisième ordre, ayant un point double en A_3.

Si, de plus, Σ_2 était tangente à une des droites fixes, à d_2 par exemple, la cubique se décomposerait à son tour en une conique, passant par A_2 et A_3, et en la droite $\overline{A_1A_3}$.

Enfin, si la conique Σ_2 était tangente à la fois à d_1, à d_2 et à $(\overline{A_1A_2})$, le lieu du point X se décomposerait en les droites $(\overline{A_1A_2})$, $(\overline{A_3A_1})$, $(\overline{A_3A_2})$ et en la droite qui joint les points où les tangentes à la courbe Σ_2, issues des points A_1 et A_2 rencontrent respectivement les droites d_2 et d_1.

Remarquons encore que si la conique Σ_2 passe par A_1, A_2, A_3, la quartique correspondante possédera en ces points des points de rebroussement.

4. Nous pouvons maintenant nous proposer de construire la courbe du quatrième ordre possédant trois points doubles donnés A_1, A_2, A_3, et passant par cinq points donnés A, B, C, D, E, c'est-à-dire la courbe la plus générale de l'espèce.

Digitized by Google

Prenons pour points fixes les points A_1 et A_2, pour droites fixes les droites $(\overline{AA_3})$ $(\overline{BA_3})$. Les jonctions de C, D, E à A_1 et A_2, déterminent sur $(\overline{AA_3})$ et $(\overline{BA_3})$ des points C_1, D_1, E_1; C_2, D_2, E_2. Soient

$$(\overline{C_1C_2}) \equiv c_1, \quad (\overline{D_1D_2}) \equiv d_1, \quad (\overline{E_1E_2}) \equiv e_1,$$
$$(\overline{A_1B}) \equiv a_1, \quad (\overline{A_2A}) \equiv b_1.$$

Construisons la courbe de la seconde classe, déterminée par les cinq tangentes a_1, b_1, c_1, d_1, e_1; si nous considérons les autres tangentes de cette courbe et si nous achevons la construction de plus haut, nous aurons la courbe demandée. Il serait intéressant de rechercher de combien de manières cette construction peut s'effectuer.

5. Proposons-nous encore de construire une courbe du troisième ordre, passant par sept points A_1, A_2, A_3, A, B, C, D et possédant en l'un d'eux, A_3 par exemple, un point double.

Il suffira encore de prendre pour points fixes A_1, A_2, pour droites fixes $(\overline{A_3A})$ et $(\overline{A_3B})$; joignons $\overline{A_1C}$, $\overline{A_2C}$, $\overline{A_1D}$, $\overline{A_2D}$; ces droites déterminent sur les droites fixes des points C_1, C_2, D_1, D_2; construisons la courbe de la seconde classe tangente aux cinq droites $(\overline{A_1A_2})$, $(\overline{A_1B})$, $(\overline{A_2A})$, $(\overline{C_1C_2})$, $(\overline{D_1D_2})$. En appliquant notre mode de transformation, nous en déduirons la courbe cherchée.

Les constructions précédentes sont absolument linéaires. On peut donc énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. *Toute quartique plane à trois points doubles peut être engendrée par le sommet d'un triangle mobile, dont les deux autres sommets parcourent deux droites fixes, tandis que les côtés correspondants passent par deux points fixes et que le troisième côté enveloppe une courbe de la seconde classe.*

Théorème II. *Toute cubique plane à un point double, peut être engendrée par le sommet d'un triangle mobile dont les deux autres sommets parcourent deux droites fixes, tandis que les côtés correspondants passent par deux points fixes dont la jonction et le troisième côté enveloppent une même courbe de la seconde classe.*

Par dualité, on en déduit les théorèmes corrélatifs :

Théorème III. *Toute courbe de la quatrième classe possédant trois tangentes doubles peut être enveloppée par le troisième côté d'un triangle mobile dont les deux autres côtés passent par deux points fixes, tandis que les*

Digitized by Google

sommets correspondants décrivent deux droites fixes et que le troisième sommet parcourt une courbe du second ordre, etc.;

Ces théorèmes corrélatifs peuvent se démontrer, d'ailleurs, directement en employant la méthode exposée plus haut.

6. Au lieu de prendre comme courbe fondamentale de notre transformation une courbe de la seconde classe, si nous prenions une courbe de la classe n, nous obtiendrions pour le lieu du point X une courbe de l'ordre $2n$, possédant trois points multiples d'ordre n aux points A_1, A_2, et A_3. La démonstration de ce théorème étant absolument identique à celle que nous avons donnée au commencement, il est inutile de la reproduire.

Si la courbe fondamentale possédait α_1 tangentes multiples d'ordre p_1, α_2 tangentes multiples d'ordre p_2, ..., α_k tangentes multiples d'ordre p_k, la transformée posséderait en outre évidemment α_1 points multiples d'ordre p_1, ..., α_k points multiples d'ordre p_k.

Si les droites d_1, d_2, $(\overline{A_1A_2})$, étaient des tangentes multiples d'ordres respectifs β_1, β_2, β_3, de la courbe fondamentale, la transformée se décomposerait en les droites multiples $(\overline{A_2A_3})$ $(\overline{A_1A_3})$ $(\overline{A_1A_2})$ respectivement d'ordres β_1, β_2, β_3, et en une courbe de l'ordre $2n - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3$, possédant en A_1, A_2, A_3, des points d'ordres $n - \beta_2 - \beta_3$, $n - \beta_1 - \beta_3$, $n - \beta_1 - \beta_2$.

Prenons pour exemple, une courbe de la troisième classe Σ_3; sa transformée sera une courbe du sixième ordre G_6, à trois points triples en A_1, A_2 et A_3.

Si Σ_3 est tangente à la droite (A_1A_2), G_6 se décompose en une courbe du cinquième ordre à un point triple et à deux points doubles et en $(\overline{A_1A_3})$.

Si Σ_3 est tangente aux droites d et (A_1A_2), la courbe G_6 se décompose en une courbe du quatrième ordre à deux points doubles et en $(\overline{A_1A_2})$ et $(\overline{A_3A_2})$.

Enfin si Σ_3 est tangente aux droites (A_1A_2), d_1 et d_2, nous obtiendrons pour la courbe transformée une cubique et les trois droites (A_1A_2) (A_2A_3) (A_1A_3).

La transformation que nous avons fait connaître est encore susceptible d'autres généralisations; nous laissons au lecteur le soin de les développer.

Digitized by Google

NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Asymptotes de l'hyperbole de Kiepert, par* M. Laisant. Soit ABC un triangle quelconque. La circonférence passant par B, C et touchant AC rencontre AB en un point N. La perpendiculaire élevée au milieu B′ de AC coupe la perpendiculaire élevée au milieu de BN en un point ω. Cela posé, la droite ω B′ coupe le cercle décrit de ω comme centre avec ωB pour rayon en deux points λ, λ′. *Les droites* Bλ, Bλ′ *sont les directions asymptotiques de l'hyperbole de Kiepert.*

12. *Construction du cube d'un nombre.* Soient ABC un triangle, AD, BE, CF, ses hauteurs, EG une perpendiculaire sur CF, H le milieu de EG. On a

$$\text{tang CDH} = \text{tang}^3 \text{A} = n^3$$

si A est l'angle dont la tangente est n (D'après M. R. Tucker, *Messenger of Mathematics*, 1884).

13. *Théorème sur les transversales.* Soient A′, B′, C′ les points de rencontre des côtés du triangle ABC avec les droites AD, BD, CD, et soient A″, B″, C″ les points de rencontre des côtés du triangle A′B′C′ avec les droites AE, BE, CE, D et E étant deux points quelconques. Démontrer que les droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent en un même point F.

Ce théorème devient évident, si, par une projection conique, on transporte l'axe d'homologie des triangles ABC, A′B′C′ à l'infini : D sera alors le centre de gravité de ABC, et F sera le complémentaire du réciproque de E par rapport à ABC. Il nous a été suggéré, il y a une dizaine d'années, par un cas particulier auquel MM. Catalan et Van Aubel avaient été conduits à la suite d'un théorème de M. Laisant (N. C. M., 1877, p. 221) : ces honorables collègues prenaient pour D le centre du cercle inscrit, et pour A, B, C les centres des cercles exinscrits à A′B′C′. Une application de ce cas particulier nous a été communiquée récemment par M. Déprez, professeur à Dinant. (J. N.)

14. *Sur les nombres parfaits impairs,* par M. E. Cesàro. Les derniers théorèmes de M. Servais (*Mathesis*, t. VII, p. 230) reposent sur l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots < \frac{1}{2},$$

Digitized by Google

d'où, successivement,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{a}+\frac{n-1}{a+2}>\frac{1}{2},$$

n étant le nombre des facteurs premiers de N. On en déduit

$$a<n-1+\sqrt{n^2-2n+5}<2n-1.$$

Donc, *s'il existe un nombre parfait impair, contenant n facteurs premiers, le plus petit de ces facteurs ne surpasse pas* $2n-3$. On peut, d'ailleurs, remplacer $2n-3$ par $n\sqrt{2}$. En effet, on doit avoir

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2n-2}\right)+\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+2n-4}\right)+\cdots>\frac{1}{2},$$

ou bien, *a fortiori*,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2n-2}>\frac{1}{n},$$

d'où

$$a<1+\sqrt{n^2+(n-1)^2}<1+n\sqrt{2}.$$

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION SE RAPPORTANT A LA GÉOMÉTRIE DU CERCLE DE BROCARD;

d'après le Dr A. Emmerich.

Le programme du *Realgymnasium* de Mulheim (Ruhr) de 1887 renferme les solutions des seize problèmes suivants :

Construire un triangle ABC, connaissant :

1. ABG.	2. AGO.	3. AGK.	4. AGA_1.
5. AKA_1.	6. A_1GK.	7. AOK.	8. ABK.
9. AKC_1.	10. ABΩ.	11. BΩC_1.	12. AOΩ.
13. $A_1\Omega\Omega'$.	14. $A_1O\Omega$.	15. $A_1K\Omega$.	16. BOA_1.

Les notations sont celles que nous employons dans *Mathesis*, savoir : G, centre de gravité; O, centre du cercle circonscrit; Ω et Ω', points de Brocard; K, point de Lemoine; A_1, B_1, C_1, sommets du premier triangle de Brocard; H, orthocentre; A_h, B_h, C_h, pieds des hauteurs; A', B', C' milieux de BC, CA, AB.

Digitized by Google

Les solutions de ces problèmes sont présentées avec une grande simplicité et les discussions sont faites avec beaucoup de soin. Nous croyons être agréable à nos lecteurs en leur communiquant les constructions des problèmes les plus difficiles.

3° AGK. — On détermine le point A'. La droite A'K rencontre la circonférence décrite sur AG_1 comme diamètre (G_1 étant le milieu de AA') au milieu de AA_h. On peut donc mener la droite A'O, et trouver le point O en s'appuyant sur l'égalité des angles KAH, OAG (O et H, K et G sont des points inverses).

4° AGA_1. — On cherche le point A'; puis on mène A_1K perpendiculaire à A_1A'; le milieu de A_1K appartenant à la médiane AA', on voit que le point K peut être déterminé (dans le triangle $A'AA_h$, deux côtés A'A et $A'A_h$, la médiane A'K et la parallèle au troisième côté forment un faisceau harmonique; A_1K est parallèle à l'un des rayons, etc.). Le problème 4° est ainsi ramené à 3°. De même, les 5° et 6° dépendent de 4°.

7° AOK. — Décrivons la circonférence ABC; elle rencontre la symédiane AK en un point W. O et H, G et K étant des points inverses, on a : *angle* A'AH = OAK = OWA = OA'A; donc la circonférence OAW passe par A'. Le triangle $A'AA_h$ ayant un angle connu, on connaît aussi l'angle AA'K formé par l'hypoténuse avec une médiane; donc un segment capable de cet angle, décrit sur AK achève de déterminer le point A'.

8° ABK. — G et K étant des points inverses, on a *angle* GAC = BAK, *angle* GBC = ABK; donc, si l'on mène par C des parallèles $C\alpha$, $C\beta$ à AA', BB', rencontrant AB en α et β, on a : $A\alpha = BA = \beta B$, angle $AC\alpha$ = CAG = BAK, $BC\beta$ = ABK. On peut donc déterminer les points α et β, et obtenir ensuite C au moyen de deux segments capables.

9° AKC_1. — Ce problème se ramène au précédent en tirant AB parallèle à KC_1, C_1C' perpendiculaire à KC_1.

10° ABΩ. — Sachant que *angle* $\Omega BC = \Omega AB = \Omega CA$, on peut déterminer la droite BC et la circonférence ΩAC.

11° BΩC_1. — La droite ΩC_1 rencontre la circonférence décrite de C_1 comme centre avec le rayon C_1B en deux points A, α; le point A est un sommet du triangle cherché, pourvu que l'angle BC_1A excède 120°. On connaît maintenant ABΩ.

12° A$O\Omega$. — On sait que $O\Omega = R\sqrt{1 - 4\sin^2 V}$; d'où l'angle de Brocard V.

13° $A_1\Omega\Omega'$. — Le cercle de Brocard est connu; la perpendiculaire au

Digitized by Google

milieu de $\Omega\Omega'$ fait connaître O et K, ainsi que l'angle V. On peut trouver R au moyen de $OK = R\sqrt{1 - 3\tang^2 V}$. La circonférence ABC étant obtenue, les droites ΩA_1, $\Omega' A_1$ déterminent les points B, C.

14° et 15°. $A_1O\Omega$, $A_1K\Omega$. — On détermine facilement Ω', ce qui nous ramène à 13°.

16° BOA_1. — C est symétrique de B par rapport à OA_1. On connaît aussi V et R; donc on peut déterminer $O\Omega = R\sqrt{1 - 4\sin^2 V}$, d'où Ω et Ω', qui sont situés sur les droites A_1B, A_1C.

Remarque. La formule $O\Omega = R\sqrt{1 - 4\sin^2 V}$ équivaut au théorème suivant : La puissance de Ω par rapport au cercle ABC est égale au carré de la corde sous-tendue par l'angle V dans le même cercle (ou interceptée par l'angle $B\Omega A$). Cette remarque peut être utilisée dans quelques-uns des problèmes précédents. (J. N.)

SUR UN MODE DE GÉNÉRATION DE LA SPIRALE HYPERBOLIQUE;

par H. Schoentjes, répétiteur à l'Université de Gand.

Soit une hélice placée devant un miroir sphérique concave de petite ouverture et de manière que son axe coïncide avec l'axe principal. D'un point quelconque M de l'hélice, on abaisse une perpendiculaire sur l'axe. Soient P le pied de cette perpendiculaire, r sa longueur, ρ la distance de l'image m de M à l'axe, F le foyer principal, C le centre de courbure, A le centre du miroir, p la distance AP, f la distance focale, h le pas de l'hélice, α l'angle que fait la perpendiculaire MP avec celle dont le pied est en F. On a la relation connue (*) :

$$\rho = \frac{f}{p - f} r. \qquad (1)$$

Posons $FP = p - f = y$, $FC = f = nh$, n étant une constante; la relation (1) devient

$$\rho = \frac{nh}{y} r;$$

(*) *Géométriquement*, pour ne pas recourir à la formule approximative (1), on peut dire que M et m se correspondent comme il suit : Le miroir est remplacé par un plan perpendiculaire à AP, F est le milieu de AC, L le point de rencontre d'une parallèle ML à l'axe AP avec le plan. Cela posé, m est le point d'intersection de LF avec MC.

Digitized by Google

or,

$$y = \frac{h}{2\pi}\alpha,$$

donc

$$\rho = \frac{2\pi nr}{\alpha}. \qquad (2)$$

Donc *l'image d'une hélice placée devant un miroir concave, de manière que les axes de la courbe et du miroir coïncident, se projette suivant une spirale hyperbolique sur un plan perpendiculaire à l'axe principal.*

Discussion. Si l'on projette l'hélice sur le même plan, on obtient un cercle de rayon r. Pour $\alpha = 0$, on a $\rho = \infty$, et la distance de l'asymptote à ce rayon vecteur est $2n\pi r$. Pour $\alpha = 2n\pi$, ce qui correspond au point de l'hélice situé dans le plan perpendiculaire à l'axe, passant par le centre de courbure, on a $\rho = r$; la spirale coupe le cercle en ce point. A mesure que le point M s'éloigne du miroir, la projection du point m se rapproche de plus en plus du centre du cercle qui est le point asymptotique de la spirale.

Quant aux points M situés entre le foyer et le miroir, ils produisent des images virtuelles dont l'ensemble se projette suivant une spirale identique à la première, mais symétriquement placée par rapport à la perpendiculaire au rayon $\alpha = 0$; en effet, à deux valeurs égales et de signes contraires de α correspondent deux valeurs égales et de signes contraires de ρ. Cette courbe s'arrête au point pour lequel $\alpha = -2n\pi$, et $\rho = -r$, c'est-à-dire au point où elle coupe le cercle.

Remarque. L'image de l'hélice est située sur un cône dont la directrice, la génératrice, l'axe et le sommet sont respectivement l'hélice, la droite CM, l'axe de l'hélice et le centre de courbure. D'autre part, la courbe appartient au cône de révolution dont le sommet est F, dont l'axe est AC et dont le rayon de la base est $AL = r$. Il en résulte que le théorème précédent peut être énoncé de la manière suivante :

Étant donnés un cône droit et un cône hélicoïdal dont les axes coïncident; la base du premier ayant pour rayon le rayon de l'hélice, et son sommet étant à égale distance de sa base et du sommet du cône hélicoïdal, l'intersection de ces deux surfaces se projette suivant une spirale hyperbolique sur un plan perpendiculaire à l'axe commun.

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 374.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 215.)

On donne deux circonférences concentriques C, C′ *et un point* O *sur la première. Une droite variable menée par le centre* ω *rencontre* C *en* A, C′ *en* A′. *Trouver :* 1° *l'équation du lieu de la projection* P *de* A *sur la droite* OA′ ; 2° *l'aire de cette courbe* (P) ; 3° *la tangente au point* P.

(H. Brocard.)

Solution par M. Derousseau. 1° Prenons pour origine des coordonnées le point O, pour axe des x le diamètre Oω. Désignons par R, R′ les rayons de C, C′, et par α l'angle Aω̂O. Les coordonnées des points A, A′ seront

$$A \ldots\ R\cos\alpha - R,\ R\sin\alpha; \quad A' \ldots\ R'\cos\alpha - R,\ R'\sin\alpha,$$

ω étant supposé situé sur l'axe des abscisses négatives. Les droites OA′, AP auront pour équations

$$y = \frac{R'\sin\alpha}{R'\cos\alpha - R}x, \quad y - R\sin\alpha = \frac{R - R'\cos\alpha}{R'\sin\alpha}(x - R\cos\alpha + R),$$

ou

$$R'y\cos\alpha - R'x\sin\alpha = Ry,$$
$$R'y\sin\alpha + (R'x + R^2 + RR')\cos\alpha = R(x + R + R').$$

De là, on tire

$$\cos\alpha = R\,\frac{x^2 + y^2 + (R + R')x}{R'(x^2 + y^2) + R(R + R')x},$$
$$\sin\alpha = \frac{R(R'^2 - R^2)xy}{R'^2(x^2 + y^2) + RR'(R + R')x}.$$

Par conséquent, l'équation du lieu (P) est

$$(x^2 + y^2)^2 + 2Rx(x^2 + y^2) - \frac{R^2(R'^2 - R^2)}{R'^2}y^2 = 0,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho^2 + 2R\rho\cos\omega - \frac{R^2(R'^2 - R^2)}{R'^2}\sin^2\omega = 0.$$

Digitized by Google

La courbe a un point de rebroussement à l'origine; elle est symétrique par rapport à Oω. Si l'on remplace ρ par $(K^2 : \rho)$ et qu'on repasse ensuite aux coordonnées rectangulaires, on voit que l'inverse de (P) est une parabole.

2° L'aire de la courbe est donnée par la formule

$$A = \int_0^\pi \rho^2 d\omega = 2R^2 \int_0^\pi \cos^2\omega \, d\omega + \frac{R^2}{R'^2}(R'^2 - R^2) \int_0^\pi \sin^2\omega \, d\omega$$

$$- \frac{2R^2}{R'} \int_0^\pi \sqrt{R'^2 - R^2 \sin^2\omega} \cos\omega \, d\omega.$$

La troisième intégrale est nulle entre les limites assignées; car la différentielle passe par les mêmes valeurs, changées de signe, entre $\frac{1}{2}\pi$ et π qu'entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$. On a, d'autre part,

$$\int_0^\pi \cos^2\omega \, d\omega = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\omega}{2} d\omega = \left[\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}\sin 2\omega\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \sin^2\omega \, d\omega;$$

d'où

$$A = \frac{\pi R^2 (3R'^2 - R^2)}{2R'^2}.$$

3° Soit V l'angle de la tangente en P avec le rayon vecteur. On sait que $\operatorname{tg} V = \rho : \frac{d\rho}{d\omega}$; par conséquent,

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho(\rho + R\cos\omega)}{R\rho \sin\omega + \frac{R^2}{R'^2}(R'^2 - R^2)\sin\omega\cos\omega}.$$

Si l'on remplace $\frac{R^2(R^2 - R'^2)}{R'^2}$ par sa valeur tirée de l'équation de la courbe, on trouve

$$\operatorname{tg} V = \frac{(\rho + R\cos\omega)\sin\omega}{(\rho + R\cos\omega)\cos\omega + R}.$$

Pour construire l'angle V, on peut mener PK parallèle et égale à ωO, projeter K en D sur OP, et l'angle cherché sera DωO; en effet, $OD = \rho + R\cos\omega$, la projection de ωD sur ωO est égale à $R + OD\cos\omega$, et la distance de D à Oω est égale à OD sin ω.

Note. Soit Q la projection de ω sur le rayon vecteur OP; ce point

Digitized by Google

décrit une circonférence C'', qui a pour diamètre ωO. La courbe (P) est, dès lors, susceptible de la définition suivante : *Étant donnés deux circonférences* C' *et* C'', *et un point* O *sur la seconde, on mène par* O *une sécante qui rencontre* C' *en* A', C'' *en* Q; *trouver le lieu du point* P *qui divise la droite* A'Q *dans un rapport donné.*

La construction de la tangente ou plutôt de la normale en P est maintenant excessivement simple. Entre les rayons vecteurs $OP = \rho$, $OA' = \rho_1$, $OQ = \rho_2$, il existe la relation

$$\rho = \frac{R\rho_1 + (R' - R)\rho_2}{R'};$$

par suite, entre les sous-normales, on a une relation analogue :

$$\rho' = \frac{R\rho_1' + (R' - R)\rho_2'}{R'}.$$

On divisera donc la distance des extrémités des sous-normales polaires des courbes C' et C'' dans le rapport R : R' — R, et le point de division appartiendra à la normale de la courbe (P). (J. N.)

Question 381.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 216.)

Le cercle osculateur ω *en un point quelconque* M *d'une parabole rencontre la courbe en un second point* N, *et le cercle osculateur* ω' *qui touche la courbe en* N *la rencontre en un point* P; *ces deux cercles se rencontrent en un point* Q *autre que* N. *Démontrer :* 1° *que les droites* MN, NP, NQ *enveloppent des paraboles;* 2° *que la ligne des centres* ωω' *enveloppe une parabole semicubique;* 3° *que les milieux des côtés du triangle* MNP *et le centre de gravité décrivent des paraboles du second degré;* 4° *que le point* Q *se meut sur une quartique;* 5° *que le centre du cercle* MNP *parcourt une cubique.* (J. Neuberg.)

Solution par MM. Jeřábek (Brunn, Autriche), Derousseau (Liége), Déprez (Dinant). Le cercle osculateur ω et la parabole donnée ayant pour sécantes communes la tangente au point $M(\alpha, \beta)$ et la corde d'osculation MN, l'équation du cercle est de la forme

$$\lambda(y^2 - 2px) + \{y\beta - p(x + \alpha)\}\{y - \beta - m(x - \alpha)\} = 0. \quad (1)$$

Digitized by Google

En exprimant que les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux, et que celui de xy est nul, on obtient

$$m = -\frac{p}{\beta}, \quad \lambda = -\frac{\beta^2 + p^2}{\beta}; \tag{2}$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation (1), on en déduit aisément pour les coordonnées du centre ω :

$$x = p + 3\alpha, \quad y = -\frac{\beta^3}{p^2}. \tag{3}$$

1° L'équation de MN étant

$$y - \beta + \frac{p}{\beta}(x - \alpha) = 0, \quad \text{ou} \quad 3\beta^2 - 2\beta y - 2px = 0, \tag{4}$$

l'enveloppe de MN (et de NP) est représentée par (*)

$$y^2 = -6px.$$

En combinant l'équation (4) avec celle de la parabole, on trouve les coordonnées de N, savoir

$$\beta_1 = -3\beta, \quad \alpha_1 = 9\alpha; \tag{5}$$

par analogie, celles de P sont

$$\beta_2 = -3\beta_1 = 9\beta, \quad \alpha_2 = 9\alpha_1 = 81\alpha, \tag{6}$$

d'où les équations de la corde MP et de son enveloppe :

$$9\beta^2 - 10\beta y + 2px = 0, \quad y^2 = \frac{18}{25}px.$$

2° Les formules (3) et (5) conduisent aux coordonnées de ω' :

$$x = p + 3\alpha_1 = p + 27\alpha, \quad y = -\frac{\beta_1^3}{p^2} = \frac{27\beta^3}{p^2}.$$

Par conséquent, l'équation de la droite $\omega\omega'$ est

$$27\beta^3 - 14p\beta(x - p) + 6p^2y = 0,$$

et celle de l'enveloppe de cette ligne est

$$y^2 = \frac{2744}{6561p}(x - p)^3.$$

3° Les coordonnées d'un point K qui divise dans un rapport constant

(*) Il suffit d'égaler à zéro le discriminant de l'équation précédente par rapport à la variable β.

Digitized by Google

l'une des cordes MN, NP, MP, et plus généralement celles d'un point K tel, que les droites MK, NK, PK divisent les droites NP, MP, MN dans des rapports constants, sont de la forme $x = l\alpha$, $y = l'\beta$; donc ce point décrit la parabole représentée par $y^2 = \frac{2pl'^2}{l}x$.

4° Le point Q appartient à la perpendiculaire abaissée de N sur $\omega\omega'$, et le milieu de NQ est sur $\omega\omega'$; donc les coordonnées de Q vérifient les équations

$$y - \beta_1 = -\frac{3p}{7\beta}(x - \alpha_1),$$

$$27\beta^3 - 14p\beta\left(\frac{x+\alpha_1}{2} - p\right) + 3p^2(y+\beta_1) = 0,$$

ou, en vertu des formules (5) et de la relation $\beta^2 = 2p\alpha$:

$$\begin{aligned} 15\beta^2 + 14\beta y + 6px &= 0, \\ 9\beta^3 - 2p\beta(5p - 7x) - 6p^2y &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Entre ces égalités, il faut éliminer β. Ajoutons-les après les avoir multipliées respectivement par py et x; il vient

$$9\beta^2x + 15p\beta y + 2p(7x^2 + 7y^2 - 5px) = 0. \tag{8}$$

Il est maintenant facile d'éliminer β entre (7) et (8). On trouve une équation du quatrième degré(*).

5° Soit

$$x^2 + y^2 - 2x\mathrm{X} - 2y\mathrm{Y} + c = 0,$$

l'équation du cercle MNP. On a les conditions

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\mathrm{X} - 2\beta\mathrm{Y} + c &= 0, \\ 81\alpha^2 + 9\beta^2 - 18\alpha\mathrm{X} + 6\beta\mathrm{Y} + c &= 0, \\ 81^2\alpha^2 + 81\beta^2 - 162\alpha\mathrm{X} - 18\beta\mathrm{Y} + c &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant c, on obtient

$$\begin{aligned} 10\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} &= 0, \\ 270\alpha^2 + 3\beta^2 - 6\alpha\mathrm{X} - \beta\mathrm{Y} &= 0; \end{aligned}$$

(*) Si l'on élimine β entre les équations des cercles ω et ω', on trouve une équation du sixième degré, laquelle renferme un facteur étranger $y^2 - 2px$; cette solution donne, à la fois, les lieux des points N, Q. (J. N.)

Digitized by Google

ajoutons ces égalités, directement, et aussi après avoir multiplié la première par — 3, il viendra

$$35\alpha + p - X = 0, \quad 60\alpha^2 - \beta Y = 0.$$

On voit facilement que le point (X, Y) décrit une parabole semi-cubique.

×Question 464.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

Calculer le côté, l'angle et la hauteur d'un triangle sphérique équilatéral : 1° en fonction du rayon du cercle circonscrit ; 2° en fonction du rayon du cercle inscrit (*).

Solution par M. Boedt. 1° le triangle rectiligne ABC étant équilatéral, on a $AB = R\sqrt{3}$, R étant le rayon du cercle circonscrit. Prenons le rayon de la sphère pour unité ; alors la corde AB est égale au double du sinus de l'arc de grand cercle $AB = a$. Donc

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} AB = \tfrac{1}{2} R\sqrt{3}, \quad \cos a = 1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{2 - 3R^2}{2}.$$

Si M est le milieu de l'arc AB, le triangle rectangle ACM donne

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a = \operatorname{tg} a \cos A, \quad \cos a = \cos \tfrac{1}{2} a \cos h ;$$

d'où

$$\cos A = \frac{\cos a}{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a} = \sqrt{\frac{2 - 3R^2}{4 - 3R^2}}, \quad \cos h = \frac{2 - 3R^2}{\sqrt{4 - 3R^2}}.$$

2° Si N, P sont les milieux des arcs AC, BC, et si r désigne le rayon du cercle MNP, la corde MN est égale à $r\sqrt{3}$. Soit a' l'arc MN ; alors

$$\sin \tfrac{1}{2} a' = \tfrac{1}{2} r\sqrt{3}, \quad \cos a' = \frac{2 - 3r^2}{2}.$$

Dans le triangle AMN, on a

$$\cos a' = \cos^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} a \cos A = \cos^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} a \, \frac{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a - 1}{2 \cos^2 \tfrac{1}{2} a} ;$$

d'où

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} a = 2(1 - \cos a') = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} a', \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a = r\sqrt{3},$$

résultat qui s'explique aisément par la considération du triangle équi-

---

(*) L'énoncé comporte une double interprétation, suivant qu'on donne la distance d'un point d'un petit cercle de la sphère au centre ou au pôle. De là deux solutions.

Digitized by Google

latéral formé par la corde MN et les tangentes menées en M, N aux arcs AB, AC.

On a ensuite

$$\cos A = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tg} a} = \frac{1-3r^2}{2}, \quad \cos h = \frac{\cos a}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a}} = \frac{1-3r^2}{\sqrt{1+3r^2}}.$$

Solution par M. Déprez. Soient O le pôle du cercle circonscrit et du cercle inscrit au triangle sphérique ABC, R et r les rayons sphériques de ces cercles, et M, N, P les milieux des arcs AB, AC, BC. Les rayons des deux cercles ont pour valeurs $\sin R$, $\sin r$; d'où les cordes $AB = \sin R.\sqrt{3}$, $MN = \sin r.\sqrt{3}$. Or AB est le double du sinus de l'arc AB, et les tangentes en M et N aux arcs AB, AC se coupent en un point T tel que $MT = NT = MN = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a$. De là :

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sin R.\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \sin r\sqrt{3}. \qquad (1)$$

L'angle A et la hauteur CM se déduisent facilement du triangle rectangle ACM, qui donne

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sin a \sin\frac{A}{2}, \quad \cos a = \cos\tfrac{1}{2}a \cos h. \qquad (2)$$

Remarque. Soient C′ le deuxième point de rencontre des arcs CA, CB; R′, r′ les rayons sphériques des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC′; O′, O″ les pôles de ces cercles. Les triangles rectangles OAM, O′AM, O″AM donnent

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a = \operatorname{tg} R\cos\tfrac{1}{2}A = -\operatorname{tg} R'\cos\tfrac{3}{2}A, \quad \sin^2\tfrac{1}{2}a = \operatorname{tg} r\operatorname{tg} r'. \qquad (3)$$

Des formules (1), (2), (3), on déduit

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{5\operatorname{tg}^2 R' \pm \operatorname{tg} R'\sqrt{9\operatorname{tg}^2 R' - 16}}{8(1+\operatorname{tg}^2 R')} = \frac{5 \pm \sqrt{9 - 16\operatorname{tg}^2 r'}}{8}.$$

Question 467.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 215.)

D'un point P (α, β) *on mène à une conique deux tangentes* PM, PN; *trouver l'aire du quadrilatère* PMFN, F *étant un foyer.* (Farisano.)

Solution par M. Déprez. Soient (x', y'), (x'', y'') les coordonnées de M, N et δ la distance de P à FM. L'aire cherchée peut s'exprimer par

$$S = \frac{(FM + FN)\delta}{2}.$$

Digitized by Google

Les coordonnées des points M, N satisfont aux équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x\alpha}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1,$$

d'où, en éliminant y;

$$(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)\,x^2-2a^2b^2\alpha x+a^4(b^2-\beta^2)=0. \qquad (1)$$

De là, on conclut déjà

$$\mathrm{FM}+\mathrm{FN}=2a-\frac{c}{a}(x'+x'')=\frac{2a(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-b^2c\alpha)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}.$$

L'équation de FM étant : $y(x'-c)-y'(x-c)=0$, on a

$$\delta=\frac{\beta(x'-c)-y'(\alpha-c)}{\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}}.$$

Le dénominateur du deuxième membre est égal à FM, et l'équation (1) donne

$$x'=\frac{a^2(b^2\alpha+\beta\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2})}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2},$$

$$y'=\frac{b^2(a^2\beta-\alpha\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2})}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}.$$

Par conséquent, après quelques réductions faciles,

$$\mathrm{S}=\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-b^2c\alpha}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}.$$

Dans le cas de la parabole représentée par $y^2=2px$,

$$\mathrm{S}=\frac{2\beta^2-2p\alpha+p^2}{2p}\sqrt{\beta^2-2p\alpha}.$$

M. Vernory a résolu la même question en prenant l'équation $y^2=2px+qx^2$.

Question 502.

(Voir *Mathesis*, t. VI, p. 23.)

Le seul nombre entier, premier avec 5, ***dont le cube diminué de*** 13, ***soit le quadruple d'un triangulaire, est*** 17. (E. Cesàro.)

Solution par M. Fauquembergue, *professeur au lycée de Mont-de-Marsan*. Nous allons faire voir que, x étant premier avec 5, l'équation

$$x^3-13=2y(y+1)$$

n'admet qu'une seule solution en nombres entiers.

Digitized by Google

Pour cela, mettons cette équation sous la forme

$$(y+3)^2+(y-2)^2=x^3,$$

et posons $y+3=u$, $y-2=v$; nous pourrons la remplacer par le système d'équations

$$u^2+v^2=x^3, \quad u-v=5.$$

La seconde montre que u et v n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1 et 5. Mais si u et v étaient divisibles par 5, x le serait aussi; ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc u et v sont premiers entre eux, et x, comme diviseur de u^2+v^2, doit être de la forme p^2+q^2, p et q étant aussi premiers entre eux(*).

Or, en faisant

$$u^2+v^2=(p^2+q^2)^3,$$

ou, plutôt,

$$u+v\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})^3,$$

on a

$$u=p^3-3pq^2, \quad v=3p^2q-q^3.$$

On sait d'ailleurs que ces formules résolvent complètement l'équation $u^2+v^2=x^3$.

La seconde équation devient alors

$$p^3-3pq^2-3p^2q+q^3=5,$$

ou

$$(p+q)(p^2-4pq+q^2)=5.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$p+q=5, \quad p^2-4pq+q^2=1.$$

Il en résulte

$$p=4, \quad q=1, \quad \text{et} \quad x=17.$$

C'est la seule solution possible.

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres, t. I, p. 203, 3ème édition* : Tout diviseur de la forme t^2+u^2, composée de deux carrés premiers entre eux, est également la somme de deux carrés premiers entre eux.

Digitized by Google

Remarque. La restriction que x soit premier avec 5, est nécessaire pour que le théorème énoncé dans la question 502 soit exact. Car, si l'on posait

$$u = 5r, \quad v = 5s, \quad x = 5t,$$

on serait conduit au système d'équations

$$r^2 + s^2 = 5t^5, \quad r - s = 1,$$

qui aurait pour solution immédiate $r = 2$, $s = t = 1$, et il en résulterait $x = 5$, $y = 7$ valeurs satisfaisant à l'équation $x^3 - 13 = 2y(y+1)$.

On peut d'ailleurs prouver que 17 et 5 sont les seuls nombres jouissant de la propriété énoncée. En effet, l'équation

$$s^2 + (s+1)^2 = 5t^5,$$

peut s'écrire

$$(2s+1)^2 + 1 = 10t^5,$$

ou, en posant $2s + 1 = u$ et ajoutant 80 aux deux membres,

$$u^2 + 9^2 = 10(t+2)[(t-1)^2 + 3].$$

Nous distinguerons trois cas, suivant que u est premier avec 9, divisible par 3, ou divisible par 9.

1° Le second membre contient un facteur de la forme $p^2 + 3q^2$, où p et q sont premiers entre eux, lequel ne peut diviser une somme de deux carrés premiers entre eux. Donc l'équation est impossible.

2° $u = 3z$; l'équation devient

$$3^2(z^2 + 3^2) = 10(t+2)[(t-1)^2 + 3].$$

Le facteur $p^2 + 3q^2$ devant diviser $3^2(z^2 + 3^2)$ et étant premier avec $z^2 + 3^2$, doit diviser 9; ce qui exige que p soit égal à zéro, c'est-à-dire que $t = 1$; et, par suite, $s = 1$. C'est la solution immédiate que nous avons signalée plus haut.

3° $u = 9z$; l'équation devient

$$3^4(z^2 + 1^2) = 10(t+2)[(t-1)^2 + 3].$$

La conclusion est la même que dans le cas précédent.

Donc, en résumé, on peut énoncer la proposition suivante :

Les seuls nombres entiers, dont les cubes diminués de 13, *soient les quadruples d'un triangulaire, sont* 5 *et* 17.

Solution partielle par M. Brocard.

Digitized by Google

×Question 556.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 56.)

Soit ABC *un triangle inscrit dans un cercle* Δ; *soient* A′, B′, C′ *les points qui, sur* Δ, *sont diamétralement opposés à* A, B, C. *La tangente en* A′ *rencontre* AB *en* A″, AC *en* A‴. *On obtient ainsi six points* A″, A‴; B″, B‴; C″, C‴. *Démontrer que le triangle* A″B″C″ *est équivalent au triangle* A‴B‴C‴. (G. de Longchamps.)

Solution par M^lle S. Bouwmeester (Rotterdam) *et* MM. Emmerich, Déprez, Stuyvaert, Mosnat, Klompers, I. Beyens, Droz *et* Bonnet. Si A_1, B_1, C_1 sont trois points pris sur les côtés du triangle ABC ou sur leurs prolongements, on démontre facilement que

$$\frac{A_1B_1C_1}{ABC} = \frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 + B_1C \cdot C_1A \cdot A_1B}{AB \cdot BC \cdot CA}, \qquad (1)$$

pourvu que l'on observe la règle des signes pour les segments d'une même droite. De cette formule on conclut que deux triangles inscrits à ABC qui ont leurs sommets deux à deux, symétriques par rapport aux milieux des côtés correspondants de ABC sont équivalents.

Tel est le cas dans la question 556. Les triangles BB′B″ et CC′C‴, par exemple, sont égaux, de sorte que CC‴ = B″B.

Appliquant la formule (1) au triangle A″B″C″ et observant que

$$BB'' = (2R : \sin A), \quad CB'' = BB'' - BC = 2R\cos^2 A : \sin A \ldots,$$

on trouve

$$\frac{A''B''C''}{ABC} = \frac{1 - \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}.$$

Voir *Mathesis*, IV, pp. 69-70, 85-86.

Question 568.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 104.)

Soit MN *une corde normale à une ellipse à l'une de ses extrémités* M, *et soit* P *le pôle de* MN. *Trouver le maximum de l'angle* MPN.

Solution par MM. Mandart *et* Déprez. Le maximum *existe;* car lorsque M parcourt un quadrant de l'ellipse, l'angle MPN varie d'une manière continue, et commence et finit par la valeur 0.

Digitized by Google

Soit I le milieu de MN. Construisons sur une longueur fixe *mp* une figure *pmin* semblable à PMIN. Alors nous voyons immédiatement que l'angle *mpn* croît avec *mi* ou décroît avec l'angle *pim*. Or, l'angle PIM, égal à celui de deux diamètres conjugués, est minimum lorsque OP est l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse ; autrement dit, MP est perpendiculaire à une diagonale du rectangle des axes. On trouve aisément

$$\operatorname{tg} \mathrm{MPN} = \frac{2\mathrm{MI}}{\mathrm{MP}} = 2 \cot \mathrm{MIP} = 2 \cot\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}\right) = \frac{a^2 - b^2}{ab}.$$

Solution analytique par M. Emmerich. Si (x, y) désignent les coordonnées de M, un calcul facile donne

$$\cot \mathrm{MPN} = \frac{1}{2a^2b^2c^2}\left(\frac{a^6 y_1}{x_1} + \frac{b^6 x_1}{y_1}\right).$$

Le produit des deux termes entre parenthèses étant constant, le minimum de leur somme a lieu lorsque ces termes sont égaux ; d'où

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{b^3}{a^3}, \quad \text{ou} \quad -\frac{b^3 x_1}{a^3 y_1} = -\frac{a}{b}.$$

Donc la tangente MP est perpendiculaire à l'un des diamètres conjugués égaux.

Autre solution de M. Stuyvaert, qui considère l'ellipse comme la polaire réciproque d'une circonférence. M. Dépresz traite la question analogue pour les normales d'angle α.

×Question 573.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 148.)

Trouver les rapports des inconnues, dans les équations

$$\frac{bz + cy}{x(-ax + by + cz)} = \frac{cx + az}{y(ax - by + cz)} = \frac{ay + bx}{z(ax + by - cz)}.$$

(Lemoine.)

Solution par M. Emmerich. On peut écrire

$$\frac{(bz + cy)yz}{-ax + by + cz} = \frac{(cx + az)xz}{ax - by + cz} = \frac{(ay + bx)xy}{ax + by - cz}.$$

Nous formons trois nouveaux rapports égaux en divisant la somme de

Digitized by Google

deux quelconques des antécédents par la somme des conséquents correspondants; il vient ainsi

$$\frac{a(y^2+z^2)+bxy+cxz}{a}=\frac{b(z^2+x^2)+cyz+ayx}{b}=\ldots,$$

retranchons de ces rapports la quantité $x^2+y^2+z^2$, nous aurons

$$\frac{x(-ax+by+cz)}{a}=\frac{y(ax-by+cz)}{b}=\frac{z(ax+by-cz)}{c}.$$

Multipliant, membre à membre, ces équations par les équations primitives, on obtient

$$\frac{bz+cy}{a}=\frac{cx+az}{b}=\frac{ay+bx}{c},$$

ou

$$\frac{abz+cay}{a^2}=\frac{bcx+abz}{b^2}=\frac{cay+bcx}{c^2};$$

d'où

$$\frac{2bcx}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2cay}{c^2+a^2-b^2}=\frac{2abz}{a^2+b^2-c^2},$$

$$x:y:z=a(-a^2+b^2+c^2):b(a^2-b^2+c^2):c(a^2+b^2-c^2).$$

Autre solution par M. Déprez.

QUESTIONS D'EXAMEN.

339. Trouver la somme des n premiers termes de la suite

$$\frac{1^4}{1.3},\ \frac{2^4}{3.5},\ \frac{3^4}{5.7},\ \frac{4^4}{7.9},\ \ldots$$

Le n^e terme est

$$\frac{n^4}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{16}\left(4n^2+1-\frac{1}{4n^2-1}\right)=\frac{1}{16}(4n^2+1)-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),\ \ldots.$$

340. Les racines de l'équation $x^3-px^2+qx-r=0$ représentant les côtés ou les hauteurs d'un triangle, trouver l'aire A du triangle en fonction de p, q, r.

$$16A^2=-Sa^4+2Sa^2b^2=-S^2a^2+4Sa^2b^2$$
$$=-[S^2a-2Sab]^2+4[S^2ab-2abcSa]\ldots$$

On peut aussi former l'équation qui admet pour racines $-a+b+c$, $a-b+c$,

Digitized by Google

$a+b-c$; si y est l'une de ces quantités, on a, par exemple, $y=-a+b+c=p-2a$, $a=\frac{1}{2}(p-y)$, et cette valeur de a doit vérifier l'équation proposée.

341. Dans tout triangle ABC :

$$\cos^2 A = 4\cos^2 B\cos^2 C - \cos(A-B)(3\cos A\cos B - \sin A\sin B).$$

(KNOWLES, *Ed. Times.*)

342. Déterminer a, b, c, d par les conditions que la fraction

$$\frac{x^3+ax+b}{x^2+cx+d}$$

ait un maximum 4 correspondant à $x=3$ et un minimum 5 correspondant à $x=1$.

Si l'on égale la fraction à 4, puis à 5, on obtient deux équations qui doivent admettre, respectivement, une racine double $x=3, x=1$. On trouve $\frac{x^3+58x-119}{x^2+10x-23}$.

(D'après le *Journal de Vuibert.*)

343. Chercher le maximum et le minimum de l'expression

$$\frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} x},$$

et sa vraie valeur pour $x=0$.

Maximum, $-\frac{4}{9}\sqrt{2}$, minimum, 3; vraie valeur, 3. (NANCY; *Baccalauréat.*)

344. Chercher les conditions auxquelles le cœfficient b doit être assujetti pour que $2\cos^2 x + b\sin x\cos x + 3\sin^2 x$ admette un maximum et un minimum.

345. Dans une pyramide régulière, la somme des projections, sur une droite quelconque, des arêtes aboutissant au sommet est égale à autant de fois la hauteur qu'il y a d'arêtes. Dans tout polyèdre régulier, la somme des projections, sur une droite quelconque, des rayons allant du centre aux sommets est nulle. (HOPPE.)

Si la pyramide n'est pas régulière, la hauteur est remplacée par la droite joignant le sommet au centre des moyennes distances des sommets de la base. (J. N.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

593. Soient, dans le plan d'un triangle ABC, M et N deux points tels que les projections de M sur les droites AN, BN, CN soient les sommets d'un triangle A'B'C' d'aire donnée K^2. Démontrer que : 1° le point N étant fixe, le lieu de M est une circonférence; 2° le point M étant fixe, le point N décrit une sextique. (J. NEUBERG.)

La première partie de cette question est élémentaire.

594. Discuter le système d'équations :

$$A\cos x\cos y+B\sin x\sin y+C(\cos x+\cos y)+D(\sin x+\sin y)+E=0$$
$$A\cos y\cos z+B\sin y\sin z+C(\cos y+\cos z)+D(\sin y+\sin z)+E=0$$
$$A\cos z\cos x+B\sin z\sin x+C(\cos z+\cos x)+D(\sin z+\sin x)+E=0.$$

***595.** Le produit de quatre nombres en progression arithmétique, augmenté de la somme des puissances quatrièmes de ces mêmes nombres, est la somme de cinq carrés. (DE ROCQUIGNY.)

***596.** Étant donné un triangle ABC, menons la tangente en A au cercle circonscrit, qui coupe BC en α. Soient A', B', C' les milieux des côtés de ABC, et H', H'', H''' les pieds des hauteurs. Menons A'A'', BB'', CC'' perpendiculaires à αA et rencontrant cette droite en A'', B'', C''; menons encore $\alpha\alpha'$ perpendiculaire à AA'.

1° Les cinq droites $\alpha\alpha'$, A'A'', AH', B''H'', C''H''' concourent en un point M de la circonférence des neuf points de ABC.

2° Les deux triangles AB'C', AA'α ont pour orthocentre commun le point M. (E. VIGARIÉ.)

Rectifications.

P. 225, Bibliographie, ligne 3, lire : 11 francs; p. 226, ligne 13, lire *que comporte*. Dans l'énoncé de la question 553 (page 238), ligne 1, lire MBC au lieu de MBC'; ligne 7, lire *par* C', au lieu de *par* B'; ligne 9, lire 3° C_aB_c au lieu de 3° C_aC_b. A la fin de l'énoncé ajoutez : *c'est-à-dire les antiparallèles de* BA *passant en* A *et en* B.

Digitized by Google

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE;

par M. Maurice d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées.

Soit un triangle ABC dans lequel nous supposons $a > b > c$. Nous appellerons *sens direct* du périmètre de ce triangle le sens ABCA, *sens rétrograde* le sens ACBA. Prenons A pour origine sur AB, B sur BC, C sur CA. Nous compterons sur chaque côté les segments à partir de l'origine correspondante, positivement dans le sens direct, négativement dans le sens rétrograde.

1. Cela posé, prenons respectivement sur AB, sur BC et sur CA les points A', B' et C' tels que $AA' = BB' = CC' = x$, et faisons varier x.

On trouve facilement que les côtés du triangle A'B'C' sont donnés par

$$\overline{A'B'}^2 = c^2 + 4x\,(x - c)\cos^2\tfrac{1}{2}B, \quad \overline{B'C'}^2 = a^2 + 4x\,(x - a)\cos^2\tfrac{1}{2}C,$$
$$\overline{C'A'}^2 = b^2 + 4x\,(x - b)\cos^2\tfrac{1}{2}A.$$

Ces côtés ont respectivement leur longueur minima pour

$$x = \tfrac{1}{2}c, \quad x = \tfrac{1}{2}a, \quad x = \tfrac{1}{2}b.$$

2. Prenons sur le côté BC le point B_1 tel que $BB_1 = c$. Puisque $BB' = AA'$, nous avons $\dfrac{BB'}{B'B_1} = \dfrac{AA'}{A'B}$, et, par suite, d'après le théorème d'Apollonius, *le côté* A'B' *a pour enveloppe une parabole tangente à* BA *en* A *et à* BB_1 *en* B_1; *cette parabole a pour axe la bissectrice de l'angle* B *du triangle* ABC. De même, *le côté* B'C' *a pour enveloppe la parabole tangente en* B *à* BC *et ayant pour axe la bissectrice de l'angle* C, *et le côté* C'A', *la parabole tangente en* C *à* CA *et ayant pour axe la bissectrice de l'angle* A.

Nous désignerons ces trois paraboles respectivement par les lettres α, β, γ(*).

3. Si S désigne la surface du triangle ABC, S' la surface du triangle A'B'C', on voit immédiatement que

$$2S' = 2S - [x\,(a - x)\sin C + x\,(b - x)\sin A + x\,(c - x)\sin B],$$

ou

$$2S' = x^2(\sin A + \sin B + \sin C) - x(a\sin C + b\sin A + c\sin B) + 2S.$$

(*) La parabole β a pour équation en coordonnées barycentriques : $4acXY - [aZ + X(a - b)]^2 = 0$; et en coordonnées tangentielles : $b\nu^2 + \mu\nu(a - b) + a\lambda\mu = 0$. (J. N.)

Digitized by Google

Pour que les trois points A', B', C' puissent se mettre en ligne droite, il faut que la surface S' puisse s'annuler, c'est-à-dire que l'équation

$$x^2(\sin A + \sin B + \sin C) - x(a \sin C + b \sin A + c \sin B) + 2S = 0,$$

ou

$$(1) \qquad x^2(a+b+c) - (ab+bc+ca)x + abc = 0 (*),$$

ait ses deux racines réelles. Cette condition s'exprime par

$$(ab+bc+ca)^2 > 4abc(a+b+c),$$

ou

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 > 2abc(a+b+c) (**).$$

Si cette condition est remplie, aux racines réelles x' et x'' de l'équation (1) *correspondent deux droites d' et d'' sur lesquelles les points* A', B' *et* C' *viennent se placer simultanément.*

Ces droites d' et d'' sont évidemment toutes deux tangentes aux paraboles α, β et γ. Il en résulte que si ces droites se confondent, c'est-à-dire si

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 2abc(a+b+c),$$

les paraboles α, β, γ sont tangentes entre elles en un même point.

Il est assez curieux de remarquer qu'une certaine corrélation existe entre les droites d' et d'' et le point direct de Brocard ω. En effet, *les droites qui joignent le point ω respectivement aux sommets* A, B, C, *font, dans le sens direct, des angles égaux, respectivement avec les côtés b, c, a;* et, *les points où la droite d' (ou d'') coupe les côtés a, b, c, sont, dans le sens direct, à des distances égales, respectivement des sommets* B, C, A.

Les transversales réciproques d'_1 et d''_1 des droites d' et d'' par rapport au triangle ABC correspondent, de même, au point rétrograde de Brocard ω'. Ces droites d'_1 et d''_1 se déterminent de la même façon que les droites d' et d'', lorsque sur chaque côté, on fait passer l'origine d'un sommet à l'autre et que l'on prend pour sens positif le sens rétrograde au lieu du sens direct (***).

(*) Cette équation peut encore se déduire de la théorie des transversales. (J. N.)

(**) Cette inégalité revient à $\frac{1}{\sqrt{c}} > \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$. (J. N.)

(***) Les coordonnées barycentriques du point d'intersection de d' et d'' sont (c, a, b); celles du point de rencontre de d'_1 et d''_1 sont (b, c, a). Ces points sont les isobariques du centre du cercle inscrit à ABC. (J. N.)

Digitized by Google

4. La valeur de x qui annule la dérivée de l'équation (1), c'est-à-dire

$$x = \frac{ab + bc + ca}{2(a + b + c)}$$

donne un maximum de la surface S' si les racines x' et x'' sont réelles, un minimum dans le cas contraire (*).

Il est bien évident que *les sommets du triangle de surface maxima sont les milieux des segments déterminés sur les côtés du triangle par les droites d' et d''* (ou les droites d'_1 et d''_1 si on a suivi le sens rétrograde).

5. Cherchons maintenant le lieu du centre de gravité G' du triangle A'B'C'. On sait que ce centre de gravité coïncide avec le centre de gravité de trois masses égales m placées aux sommets du triangle.

Nous pouvons décomposer : 1° la masse m appliquée en A' en une masse $\frac{m(c-x)}{c}$ appliquée en A, et en une masse $\frac{mx}{c}$ appliquée en B;

2° la masse m appliquée en B' en une masse $\frac{m(a-x)}{a}$ appliquée en B, et en une masse $\frac{mx}{a}$ appliquée en C;

3° la masse m appliquée en C' en une masse $\frac{m(b-x)}{b}$ appliquée en C, et en une masse $\frac{mx}{b}$ appliquée en A.

Nous avons ainsi

$$\text{en A, la masse } \frac{mx}{b} + \frac{m(c-x)}{c} = m + mx\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right),$$

$$\text{en B, la masse } \frac{mx}{c} + \frac{m(a-x)}{a} = m + mx\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right),$$

$$\text{en C, la masse } \frac{mx}{a} + \frac{m(b-x)}{b} = m + mx\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Nous pouvons d'abord composer les trois masses m qui nous donnent

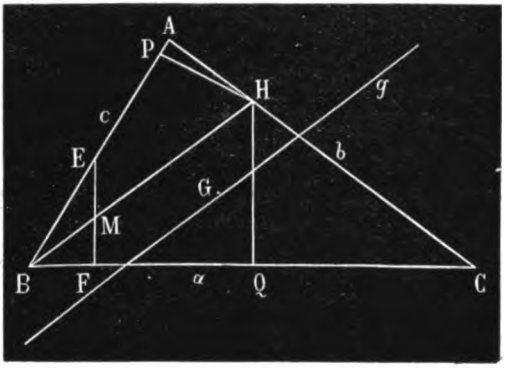
---

(*) Il est peut-être préférable de dire que la valeur de x correspond à un minimum de S', minimum qui est négatif dans le premier cas, positif dans le second. (J. N.)

Digitized by Google

le centre de gravité G du triangle. Quant aux trois masses $mx\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$, $mx\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)$, $mx\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$, leur somme étant nulle, elles donnent naissance à un couple, c'est-à-dire à une résultante infiniment petite appliquée en un point situé à une distance infiniment grande, dans une direction donnée que nous appellerons direction δ.

Dès lors, *le lieu du centre de gravité* G′ *du triangle* A′B′C′ *est la droite*



menée par le centre de gravité G *du triangle* ABC *parallèlement à la direction* δ. Nous désignerons cette droite par la lettre g.

Il est facile de déterminer la direction δ. En effet, si nous composons les masses $mx\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$ et $mx\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ respectivement appliquées aux points A et C, nous obtenons la masse $mx\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$ appliquée à un point H de AC tel que

$$\frac{HA}{HC}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=\frac{(b-a)c}{(c-b)a}=\frac{(a-b)\sin C}{(b-c)\sin A},$$

ou, en abaissant les perpendiculaires HP et HQ sur BA et sur BC,

$$\frac{HP}{HQ}=\frac{a-b}{b-c}.$$

Digitized by Google

Cette proportion montre que la droite BH, qui donne la direction δ, passe par le milieu M de la droite EF telle que $BE = b - c$ et $BF = a - b$.

La direction δ est donc facile à obtenir; en menant par le point G une parallèle à cette direction, on a la droite g. Représentant par l la longueur BH et comptant sur la droite g les segments positifs dans le sens de H vers B, l'on a

$$GG' = x\frac{l(a-c)}{ac}.$$

Ainsi, *la distance du centre de gravité variable* G' *au centre de gravité fixe* G *est proportionnelle à* x.

Il résulte aussi de cette formule que *les centres de gravité de deux triangles variables correspondant à des valeurs de* x *égales et de signes contraires sont symétriques par rapport à* G.

6. Si au lieu de considérer les triangles formés dans le sens direct, on considère les triangles formés dans le sens rétrograde, ce qui suppose que pour chaque côté on porte l'origine d'une extrémité à l'autre, on voit, en opérant par la même méthode de décomposition de masses, que l'on obtient pour lieu du centre de gravité la même droite g; seulement le sens positif est renversé. On déduit de là ce théorème :

Adoptant un certain sens pour le périmètre du triangle ABC, *on porte sur le côté* AB *les segments* AA_1 *et* BB_2, *sur le côté* BC *les segments* BB_1 *et* CC_2, *sur le côté* CA *les segments* CC_1 *et* AA_2. *Si les six segments ainsi portés sont égaux entre eux, les triangles* $A_1B_1C_1$ *et* $A_2B_2C_2$ *ont même centre de gravité.*

La droite g peut donc, à un certain point de vue, être considérée comme un *élément double* du plan du triangle ABC.

La méthode que nous venons d'employer, outre qu'elle a l'avantage de rendre intuitives les remarques qui précèdent, se prête sans aucune modification à la généralisation que voici :

Si des mobiles de même masse, partant en même temps des sommets d'un polygone plan ou gauche, parcourent les côtés de ce polygone tous dans le même sens en ayant constamment la même vitesse, le centre de gravité de ces mobiles décrit une droite.

Mais il est bien facile d'obtenir immédiatement l'équation de la droite g en coordonnées trilinéaires, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence (les X se comptant perpendiculairement au côté a, les Y

Digitized by Google

perpendiculairement au côté b, les Z perpendiculairement au côté c). En effet, on voit sans difficulté que les coordonnées du point G′ sont

$$X = \frac{x \sin C + (c - x) \sin B}{3}, \quad Y = \frac{x \sin A + (a - x) \sin C}{3},$$

$$Z = \frac{x \sin B + (b - x) \sin A}{3}.$$

Faisant la somme, on a

$$X + Y + Z = \frac{c \sin B + a \sin C + b \sin A}{3},$$

qui est l'équation de la droite g. Ainsi, *la droite g est le lieu des points dont la somme des distances aux trois côtés du triangle est égale à la moyenne arithmétique des hauteurs de ce triangle*. Cette propriété pourrait servir de définition à la droite g dans une étude systématique de cet élément spécial du plan d'un triangle.

7. On peut remarquer que toutes les droites lieux des points dont la somme des distances aux trois côtés du triangle est constante, sont comme la droite g parallèles à la direction δ définie plus haut. Nous désignerons une telle droite par la lettre $\varkappa$. Par tout point M du plan passe une droite $\varkappa$. L'application du théorème de Tschirnhausen sur la construction de la normale à une courbe définie par une relation entre les distances de chacun de ses points à plusieurs courbes fixes, montre que la perpendiculaire élevée en M à la droite δ correspondante est la résultante de trois longueurs égales MA′, MB′, MC′ portées, dans le sens positif(*), sur les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés a, b, c. Cette perpendiculaire, en vertu d'un théorème de Leibniz, passe donc par le centre de gravité des points A′, B′, C′, qui est aussi le centre de gravité du triangle A′B′C′. De là, ce théorème :

Si les droites qui joignent les sommets du triangle A′B′C′ *au centre du cercle circonscrit à ce triangle sont perpendiculaires* (*dans le sens positif*) *aux côtés du triangle* ABC, *la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au triangle* A′B′C′ *au centre de gravité de ce triangle est perpendiculaire à la direction* δ *du triangle* ABC.

Note. La direction δ est celle de la droite représentée par l'équation $X + Y + Z = 0$, c'est-à-dire celle de la droite joignant les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC. Elle est perpendiculaire à la

(*) Sens des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur sur les côtés.

Digitized by Google

droite joignant le centre du cercle circonscrit et celui du cercle inscrit à ABC.

Voici une méthode très élémentaire pour arriver aux résultats du n° 5. Lorsque le sommet A du triangle ABC décrit une droite quelconque AA', le centre de gravité G décrit une droite GG' parallèle à AA' et égale au tiers de AA'; c'est ce qu'on voit aisément par la similitude des triangles MAA', MGG', M étant le milieu de BC. Par conséquent, si l'on fait glisser les sommets A, B, C sur les côtés AB, BC, CA des quantités $AA' = BB' = CC' = x$, on aura le centre de gravité G' du triangle A'B'C', en construisant la ligne brisée $G\alpha\beta G'$ dont les côtés $G\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta G'$ sont parallèles à AB, BC, CA et égaux à $\frac{1}{3}x$. Lorsque x change, la ligne $G\alpha\beta G'$ reste homothétique à elle-même par rapport à G. Donc etc. Un calcul facile donne d'ailleurs $\overline{GG'}^2 = x^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$.

Plus généralement, considérons un système de points $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ chargés des masses $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Soit B le centre de gravité des $(n-1)$ premières masses, et G celui de toutes les masses; G divise la droite BA_n en deux segments tels que

$$\frac{BG}{BA_n} = \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}.$$

Il résulte de là que si A_n décrit la droite A_nC_n, G décrit une droite parallèle à A_nC_n et égale à $\alpha_n \cdot A_nC_n : (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$. Par conséquent, si l'on imprime aux points $A_1, A_2, \ldots A_n$ les déplacements $A_1C_1, A_2C_2, \ldots, A_nC_n$, le déplacement du centre de gravité est la résultante d'une ligne brisée dont les côtés sont proportionnels aux quantités $\alpha_1 \cdot A_1C_1, \alpha_2 \cdot A_2C_2, \ldots, \alpha_n \cdot A_nC_n$ et parallèles à $A_1C_1, A_2C_2, \ldots, A_nC_n$.

Les conséquences de ce résultat sont nombreuses. Par exemple, ***si des mobiles de masses quelconques ont des mouvements rectilignes uniformes, leur centre de gravité est également animé d'un mouvement rectiligne uniforme; si les vitesses $v_1, v_2, \ldots v_n$ de ces mouvements sont telles que le polygone ayant des côtés parallèles à $A_1C_1, A_2C_2, \ldots$ et proportionnels à $\alpha_1v_1, \alpha_2v_2, \ldots$ se ferme de lui-même, le centre de gravité reste immobile.*** De là on peut conclure un théorème dû à Pappus et généralisé par M. Laisant(*). (J. N.).

(*) N. C. M., t. VI, pp. 472 et 518 (Question 573, Cesàro), et *Mathesis*, t. I, p. 167, t. II, pp. 59, 76-77, t. V, p. 44 (Question 359).

Digitized by Google

NOTES MATHÉMATIQUES.

15. *Théorème d'arithmétique, par* M. Oltramare, *professeur à l'Université de Genève*(*). 1° Soit N un nombre entier. Je fais la somme de tous les nombres premiers, facteurs de N, y compris l'unité (et N, si N est premier). Soit N′ cette somme. J'opère sur N′ comme j'ai opéré sur N; soit N″ le résultat. J'opère de même sur N″, et ainsi de suite. Démontrer que le résultat final sera toujours 3 ou 6.

2° Soit P un nombre quelconque, suffisamment grand. J'opère successivement sur tous les nombres de 1 à P comme j'ai opéré tantôt sur N. Si K est le nombre de fois que le résultat est 6, K′ le nombre de fois qu'on obtient 3, le rapport (K : K′) est toujours très voisin de $\frac{1}{2}$ ou égal à $\frac{1}{2}$.

×**16.** *Extrait d'une lettre de* M. Laisant. « Si l'on a simultanément

$$a_1 \cos x_1 + a_2 \cos x_2 + \cdots + a_n \cos x_n = 0,$$
$$a_1 \cos (x_1 + \alpha) + a_2 \cos (x_2 + \alpha) + \cdots + a_n \cos (x_n + \alpha) = 0,$$

on aura aussi

$$a_1 \cos (x_1 + \theta) + a_2 \cos (x_2 + \theta) + \cdots + a_n \cos (x_n + \theta) = 0,$$

θ étant quelconque.

Cette remarque, qui peut être établie par la seule théorie des projections, est-elle nouvelle? Je l'ignore. On peut s'en servir pour démontrer les formules sin $(x + y)$, cos $(x + y)$ *analytiquement, sans le secours d'aucune figure*, et cela dans toute leur généralité. Insignifiante au point de vue scientifique, elle peut présenter un très réel intérêt au point de vue didactique, car l'enseignement de la trigonométrie au début se trouve simplifié(**). »

×**17.** *Sur les points du diamètre de Brocard*(***), *par* M. Emmerich.

(*) Question inédite communiquée au congrès de Toulouse, à M. E. Lemoine, qui a eu l'obligeance de nous la transmettre. Nous en insèrerons volontiers, dans *Mathesis*, les solutions que nos lecteurs voudront bien nous adresser. (*Réd.*)

(**) A ce sujet, voir une note de M. Bergmans, dans *Mathesis*, t. IV, p. 222.

(***) C'est-à-dire la droite OK. Voir l'article de M. M'Cay, pp. 209-210, où l'on trouve les valeurs de θ qui correspondent aux points les plus remarquables de la droite OK.

Digitized by Google

Soient O, K, Ω, L le centre du cercle circonscrit au triangle de référence ABC, le point de Lemoine, un point de Brocard et un point quelconque de la droite OK. Les coordonnées normales de L sont de la forme

$$\sin(A+\theta),\quad \sin(B+\theta),\quad \sin(C+\theta).$$

Les coordonnées absolues de O et K étant R cos A, ... et R sin A tg V, ... (V = angle de Brocard), écrivons

$$\sin(A+\theta) = \sin A \operatorname{tg} V \times \cot V \cos\theta + \cos A \times \sin\theta,$$

ce qui montre que

$$\frac{OL}{LK} = \cot V \cos\theta.$$

Or l'angle KOΩ étant égal à V, les triangles OLΩ, KLΩ donnent

$$\frac{OL}{O\Omega} = \frac{\sin O\Omega L}{\sin OL\Omega},\qquad \frac{LK}{K\Omega} = \frac{\sin L\Omega K}{\sin OL\Omega},$$

d'où

$$\frac{OL}{LK} : \frac{O\Omega}{K\Omega} = \frac{OL}{LK} : \cot V = \cot L\Omega K.$$

Par conséquent $\theta = L\Omega K$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 325.

(Voir *Mathesis*, t. IV, p. 94 et t. VII, p. 185.)

On donne une courbe C *et un point fixe* O. *La circonférence décrite de* O *comme centre et passant par un point* M *de* C *rencontre la tangente et la normale menées en* M, *aux points* T *et* N. *Construire les tangentes aux lieux décrits par* T *et* N. (J. Neuberg.)

Solution par M. Meurice(*). Décomposons la vitesse du point M dirigée suivant MT en deux autres : une vitesse de glissement dirigée suivant MO et que nous représentons en grandeur par MO, et une vitesse de circulation normale à MO. Si nous menons OP perpendiculaire à OM et terminée en P à MT, MP sera la vitesse totale de M.

Décomposons aussi la vitesse de N en une vitesse de glissement suivant

---

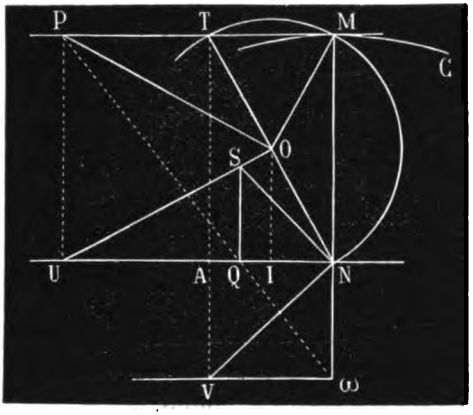
(*) M. Meurice a aussi résolu la question 556 (voir p. 260).

Digitized by Google

NO et une vitesse de circulation autour de O. A cause de OM = ON, la première composante sera NO.

La normale MN tourne autour du centre de courbure ω de la courbe C au point M. Cette rotation imprime à M la vitesse MP, et, par suite, à N une vitesse NQ perpendiculaire à MN et limitée en Q à la droite ωP; cette vitesse NQ, combinée avec une vitesse convenable dirigée suivant NM, donne à N sa vitesse totale.

Connaissant les vitesses de glissement NO, NQ du point N par rapport aux deux pôles O, ω, la règle du quadrilatère des vitesses suffit pour déterminer la vitesse totale de N. Donc si S est le point de rencontre des perpendiculaires élevées en O sur ON et en Q sur QN, NS est la tangente à la courbe décrite par N.



Les points N et T étant symétriques par rapport à O, les tangentes à leurs trajectoires sont parallèles.

Solution analytique. Soient (x, y) les coordonnées de M, (X, Y) celles de N par rapport à des axes passant par O; nous aurons

$$(Y - y)\,y' + (X - x) = 0, \quad X^2 + Y^2 = x^2 + y^2, \qquad (1)$$

et en résolvant ces égalités par rapport à X, Y :

$$X = \frac{x + 2yy' - xy'^2}{1 + y'^2}, \quad Y = \frac{yy'^2 + 2xy' - y}{1 + y'^2}.$$

Cherchons les dérivées $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dY}{dx}$; leur quotient donne la dérivée $\frac{dY}{dX}$. Pour faciliter l'interprétation du résultat, nous prenons les axes parallèles à MT et MN; alors $y' = 0$, $X = x$, $Y = -y$, et

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2xy''}{1 + 2yy''} = -\frac{2x}{\rho - 2y},$$

ρ étant le rayon de courbure ωM. D'où la construction suivante : mener ωV égale et parallèle à MT, et NV sera la normale à la trajectoire de N.

Pour démontrer l'identité des deux solutions, menons OI perpendicu-

Digitized by Google

laire à NQ et soit U le point de rencontre de NQ avec OS; on a, visiblement, NU = MP. Des triangles semblables donnent

$$\frac{SQ}{UQ} = \frac{OI}{UI} = \frac{IN}{OI}, \quad \frac{UQ}{QN} = \frac{PU}{\omega N} = \frac{2OI}{\omega N},$$

d'où, par multiplication,

$$\frac{SQ}{QN} = \frac{2IN}{\omega N} = \frac{\omega V}{\omega N}.$$

Les triangles QSN et ωVN sont donc semblables, et les côtés homologues sont perpendiculaires.

Pour établir notre solution par la cinématique, nous observons que la droite MT roulant sur C, l'angle droit TMω a pour centre instantané de rotation le point ω et que les vitesses des points de son plan sont proportionnelles aux distances de ces points au centre ω. Donc si les points T, N étaient à des distances fixes du sommet de l'angle, on pourrait représenter leurs vitesses, tournées de $\frac{1}{2}\pi$ autour de ces points, par les droites ωT, ωN. Ces vitesses étant combinées avec des vitesses convenables dirigées suivant MP et MN donneraient les vitesses totales de T et N. Si l'on décompose Tω en TV et TM, on voit que le point T est animé de trois vitesses : deux dirigées suivant MP, et la troisième perpendiculaire à MP et égale à TM. Les points N et T ayant même vitesse, on conclut de ce qui précède, que les deux composantes de la vitesse de N suivant NM et NU sont égales à TM et ωN; le parallélogramme des vitesses est NωVA, pourvu que les vitesses aient tourné d'un angle droit autour de N; NV est donc la normale. (J. N.)

Solution par les équipollences(*). Si l'on substitue à la courbe C le cercle osculateur ω et que l'on désigne par O′ le symétrique de O par rapport à NM, par φ l'angle OωM, on a l'équipollence

$$OT = O'M = O'\omega + \omega M = O\omega \cdot e^{2i\varphi} + \rho e^{i\varphi},$$

d'où en différentiant et en multipliant par i :

$$i\frac{dOI}{d\varphi} = -2O\omega \cdot e^{2i\varphi} - \rho e^{i\varphi} = -2OT + \omega M = TN + \omega M.$$

Donc la normale à la courbe (T) rencontre MN en un point K, tel que NK = ρ. (Mantel.)

(*) Les notations sont les mêmes que précédemment. Pour une autre solution, voir le *Traité des équipollences*, par Laisant, p. 240, exercice 13.

Digitized by Google

×Question 442.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 143.)

Soient, dans un quadrilatère sphérique complet, α, β, γ les trois diagonales et (A, A'), (B, B'), (C, C') ***les angles formés par les côtés aux extrémités des diagonales. Démontrer que***

$$\sin A \sin A' \cos \alpha + \sin B \sin B' \cos \beta + \sin C \sin C' \cos \gamma = 0.$$

(Mac-Lellan.)

Solution par M. Van Dorsten (Rotterdam). Pour fixer les idées, supposons que ABA'B' soit un quadrilatère convexe, que C soit le point de concours de AB' et BA', C' celui de AB et B'A' et que A' soit situé sur les arcs BC, B'C' (et non sur leurs prolongements). Les triangles AA'B, AA'C donnent

$$\cos AB = \cos \alpha \cos BA' + \sin \alpha \sin BA' \cos AA'B,$$
$$\cos AC = \cos \alpha \cos CA' - \sin \alpha \sin CA' \cos AA'B,$$

d'où, en éliminant cos AA'B :

$$\cos AB \sin CA' + \cos AC \sin BA' = \cos \alpha \sin CB, \qquad (1)$$

relation connue. Par analogie

$$\cos AB \sin CB' + \cos BC \sin AB' = \cos \beta \sin AC, \qquad (2)$$
$$\cos AC \sin BC' - \cos BC \sin AC' = -\cos \gamma \sin AB. \qquad (3)$$

Nous pouvons éliminer cos AB, cos AC, cos BC en ajoutant les égalités (1), (2), (3), multipliées respectivement par sin BC' sin AB', — sin AC' sin A'B, sin A'B sin AB' et en tenant compte de la relation entre les segments des côtés du triangle ABC coupés par la transversale B'A'C'. Si ensuite dans le résultat mis sous la forme

$$\frac{\sin BC}{\sin AB} \cdot \frac{\sin BC'}{\sin A'B} \cos \alpha - \frac{\sin AC}{\sin AB} \cdot \frac{\sin AC'}{\sin AB'} \cos \beta + \cos \gamma = 0,$$

on remplace les rapports de sinus par les suivants :

$$\frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{\sin A'}{\sin C'}, \quad \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{\sin B'}{\sin C'},$$

on trouve la formule proposée. Il est bien entendu que les angles qui y entrent, comportent un sens de rotation déterminé; si a, b, c, d sont les côtés du quadrilatère, les angles (A, A'), ... peuvent être indiqués par

$$(ab) \text{ et } (cd), \quad (ac) \text{ et } (db), \quad (ad) \text{ et } (bc).$$

Digitized by Google

×Question 567.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 104.)

Un triangle ABC ***étant circonscrit à un cercle de rayon*** r, ***on mène une tangente quelconque*** PQ, ***qui rencontre*** AB ***et*** AC ***en*** P ***et*** Q. ***Si*** p, q ***sont les distances de ces points à*** BC, ***démontrer que***

$$\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{2r}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{2r}} = \text{const.} \qquad \text{(Laurens.)}$$

De bonnes solutions (***ou plutôt des vérifications***) ***de cette question nous ont été adressées par*** MM. Mosnat, Déprez ***et*** Emmerich. La solution suivante montre comment on arrive rapidement à d'autres théorèmes du même genre.

A une valeur donnée de p ou q, il ne correspond qu'une seule valeur de q ou p; donc la relation entre ces variables est de la forme

$$Apq + Bp + Cq + D = 0,$$

A, B, C, D étant des constantes. Comme à $p = 0$ correspond $q = 0$, on a $D = 0$ et la formule peut être écrite ainsi

$$\frac{M}{p} + \frac{N}{q} = 1. \qquad (1)$$

Si l'on considère la tangente parallèle à BC, on a $p = q = 2r$; donc

$$\frac{M}{2r} + \frac{N}{2r} = 1. \qquad (2)$$

En soustrayant (2) de (1), on a la relation proposée.

Pour obtenir la valeur de la ***constante***, on peut supposer P en A et par suite, Q au point de contact de AC avec le cercle; alors

$$p = h = 2r \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C \operatorname{cosec}\frac{1}{2}A, \quad q = QC \sin C = 2r\cos^2\frac{C}{2}.$$

On trouve

$$-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C. \qquad \text{(J. N.)}$$

Digitized by Google

*Question 570.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 126.)

Construire un parallélogramme ABCD, ***connaissant les distances d'un point intérieur*** M ***aux sommets et la somme des angles*** AMB, CMB.

(Cl. Thiry.)

Solution par M. Emmerich. *a*) Supposons que les sommets se suivent sur le périmètre dans l'ordre A, B, C, D. Le triangle AMC est immédiatement déterminé par deux côtés MA, MC et l'angle compris AMC. Soit E le point de concours des diagonales, M' le symétrique de M par rapport à E. Les triangles MM'D, MM'B s'obtiennent facilement; car DM' = BM, BM' = DM.

b) Si l'on donne la somme des angles AMB, BMD, on pourra construire le triangle AMD dont on connaît deux côtés et l'angle compris. Le triangle BMC est maintenant déterminé par ses trois côtés. La somme des hauteurs des triangles AMD, BMC fait connaître la distance des parallèles AD, BC, etc.

c) Donnons-nous maintenant la somme des angles AMB, CMD. Faisons tourner le triangle CMD autour de M, jusqu'à ce que le côté MC se place sur MB; soit C'MD' la nouvelle position de CMD. Le triangle AMD' dont on connaît deux côtés MA, MD' peut être construit. Menons par B une parallèle à C'D', rencontrant C'M en K. Comme

$$MK : MD' = MB : MC' = MB : MC,$$

on peut déterminer le point K. La proportion

$$BK : C'D' \text{ (ou } AB) = MB : MC' \text{ (ou } MC),$$

montre que le rapport BK : AB est connu; d'où un lieu géométrique sur lequel doit se trouver le point B. La distance MB étant donnée, on voit que le point B s'obtient par l'intersection de deux circonférences.

La même question a été résolue par MM. Dépez, Verbecke, G. Bonnet, Boedt, Meurice, Stuyvaert et Minoliti (ce dernier, par la géométrie projective).

Menons AM' et BM' parallèles à MD, MC. Le problème *c*) est ainsi ramené, d'après une remarque faite par M. Meurice, à construire un quadrilatère AMBM' dont on connaît les quatre côtés et la somme de deux angles opposés, problème dont une solution due à M. H. Van Aubel a paru dans *Mathesis*, t. I, p. 93. Réciproquement, la construction d'un tel quadrilatère se ramène au problème de

Digitized by Google

M. Thiry. Par suite, l'ingénieuse solution de M. Emmerich s'applique à ce nouveau problème; en particulier, on a un nouveau moyen de construire un quadrilatère inscriptible dont on donne les quatre côtés.

Si l'on donne les distances MA, MB, MC, MD, avec la condition que les angles AMB, AMD soient égaux, on connaîtra, dans le quadrilatère AMBM', les quatre côtés et comme deux angles consécutifs AMB, M'AM sont égaux, on pourra appliquer un problème proposé par M. Delbœuf et résolu dans *Mathesis*, t. I, p. 179. (Remarque due à M. Meurice).

QUESTIONS D'EXAMEN.

346. La perpendiculaire élevée au milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC rencontre AB en D, CA en E. Démontrer que $\overline{BC}^3 = 4BD.\,CE.\,AH$, AH étant la hauteur. (G. Russo.)

347. Par le centre I du cercle inscrit au triangle ABC, on mène des parallèles aux côtés; soient (α, α'), (β, β'), (γ, γ') les points où elles rencontrent le périmètre du triangle. Démontrer que

$$\frac{I\alpha . I\alpha'}{a} = \frac{I\beta . I\beta'}{b} = \frac{I\gamma . I\gamma'}{c} = \frac{abc}{4p^2} = \frac{Rr}{p}. \qquad \text{(Thiry.)}$$

348. Si dans un triangle ABC, rectangle en A, on mène la hauteur AH, la bissectrice AD et la médiane AM, on a

$$\frac{MD}{DH} = \frac{a^2}{2bc}. \qquad \text{(Thiry.)}$$

349. Soient D_a, E_a les pieds des bissectrices de l'angle A du triangle ABC, M_a et F_a les milieux de BC et D_aE_a, H_a le pied de la hauteur issue de A. Démontrer les relations

$$bc = D_aE_a . M_aH_a, \quad \frac{1}{D_aE_a} + \frac{1}{D_bE_b} + \frac{1}{D_cE_c} = 0,$$

et prouver que les droites AF_a, BF_b, CF_c touchent la circonférence ABC.

350. La circonférence décrite sur la hauteur AH d'un triangle ABC comme diamètre coupe les côtés AB, AC en M, N. Démontrer que $AMN : ABC = h^2 : 4R^2$. (Thiry.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

597. L'équation indéterminée en nombres entiers

$$1.2\ldots x+1=y^2$$

n'admet pas d'autres solutions que

$$x=4,\ 5,\ 7,\ y=5,\ 11,\ 71. \qquad \text{(H. Brocard.)}$$

598. Ayant posé

$\alpha_1=A\alpha+B\beta+C\gamma$. $\beta_1=A'\alpha+B'\beta+C'\gamma$, $\gamma_1=A''\alpha+B''\beta+C''\gamma$;
$\alpha_2=A\alpha_1+B\beta_1+C\gamma_1$, $\beta_2=A'\alpha_1+B'\beta_1+C'\gamma_1$, $\gamma_2=A''\alpha_1+B''\beta_1+C''\gamma_1$;
$\alpha_3=A\alpha_2+B\beta_2+C\gamma_2$, etc.; $\alpha_4=A\alpha_3+B\beta_3+C\gamma_3$, etc.

on demande comment doivent être les coefficients A, B, C, A', ... pour que

$$\frac{\alpha_n}{\alpha}=\frac{\beta_n}{\beta}=\frac{\gamma_n}{\gamma}\ (*). \qquad \text{(E. Lemoine.)}$$

×**599.** Étant donnés deux diamètres OX, OY d'un cercle Σ non tracé, et deux points S et S_1 sur OX, deux points S' et S'_1 sur OY, il existe toujours deux cercles Δ et Δ' ayant ces couples de points pour centres de similitude externe et interne avec Σ. Trouver le centre radical des trois cercles Σ, Δ, Δ', au moyen de la règle et de l'équerre seules.

(E. Vigarié.)

×**600.** Le nombre qui exprime la somme des puissances $p^{ièmes}$ de dix nombres entiers consécutifs se termine par un 5, excepté si p est un multiple de 4; dans ce cas, il se termine par 3. (E. Cesàro.)

(*) Cette question n'est pas entièrement nouvelle. Elle se rattache à la *projectivité cyclique*. Les conditions de la question sont réalisées, lorsqu'on fait tourner une figure n fois autour d'un point fixe, chaque fois de l'angle $(2\pi : n)$. (J. N.)

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES(*).

(Pour les rectifications, voir pages 75, 104, 126, 264).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

	Pages.
×Sur la divisibilité des nombres; par M. E. Catalan	44
Sur le neuvième nombre parfait; par M. Ed. Lucas	45
×Théorème d'arithmétique; d'après M. Christensen	178
×Sur les nombres parfaits; par M. Cl. Servais	228
×Sur les nombres parfaits impairs; par M. E. Cesáro	245
Théorème d'arithmétique; par M. Oltramare	272
×Question 288; solution par M. Neuberg	68
×Question 528; solution par M. H. Brocard	73
Questions 173 et 174; solution par M. Fauquembergue	96
×Question 371; solution par M. Fauquembergue	120
×Question 547; solution par MM. Hacken et Mosnat	124
×Question 538; solution par M. Déprez	144
×Question 560; solution par MM. Stevart, Choisis, etc.	146
×Question 475; solution par MM. Collin et Mandart	163
Question 458; solution par M. Fauquembergue	200
Question 502; solution par M. Fauquembergue	257

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Questions de géométrie et de trigonométrie	16
×Questions de trigonométrie sphérique; par M. Déprez	46
×Réalité des racines de l'équation en s; d'après M. Buchheim	63
Exercices de calcul symbolique et solution de la question 499; par M. E. Cesáro	177
×Identités algébriques; par M. Boije af Gennäs	179
Limite supérieure des racines positives d'une équation algébrique; par M. E. Wasteels	180
Théorème de trigonométrie; par M. Laisant	272
×Question 395; solutions par MM. Pisani et Mineur	22
×Question 469; solution d'après M. Tucker	99
×Question 425; solution par MM. Mosnat et Meurice	196
×Question 426; solutions par MM. Rochetti, Déprez, etc.	197
×Question 573; solution par M. Emmerich	261
×Question 442; solution par M. Van Dorsten	276

(*) On a renvoyé, pour chaque question traitée, à tous les passages où l'on s'occupe de cette question. Plusieurs articles sont indiqués dans deux ou trois subdivisions de la table des matières. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires. (P. M.)

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Pages.

Sur les points complémentaires; par M. E. Vigariè 6, 57, 84, 105
Sur le cercle triplicateur; par M. Tucker. 12
Propriétés de trois figures semblables; par M. Casey. 14
Questions de géométrie et de trigonométrie. 16
Questions de trigonométrie sphérique; par M. Déprez 46
Partage d'une droite en moyenne et extrême raison; d'après M. Weidenholzer. 62
Divers énoncés d'une propriété unique; par M. Laisant 64
Sur le calcul approximatif des aires planes, questions 92, 93; par M. P. Mansion. 77
Sur la réversibilité de la transformation linéaire; par M. Cl. Servais . . . 90
Sur le nœud de cravate; d'après M. Jacoli 92
Sur les médianes, les bissectrices et les symédianes d'un triangle par M. Cl. Thiry 116
Centre isologique du triangle; par M. J. Neuberg 117
Sphère de Roberts; par M. J. Neuberg 134
Applications de la théorie des rayons vecteurs réciproques 138, 155
Applications des propriétés de trois figures semblables; par M. Van Dorsten. 161
Transmutation d'un triangle; par M. J. Neuberg 180
Propriétés du contreparallélogramme 227
Construction du cube d'un nombre; d'après M. Tucker 245
Théorème sur les transversales; par M. J. Neuberg 245
Problèmes de construction se rapportant à la géométrie du cercle de Brocard; d'après M. Emmerich. 246
Quelques propriétés du triangle; par M. Maurice d'Ocagne 265
Sur les points du diamètre de Brocard; par M. Emmerich 272
Question 382; solutions par MM. Pisani, Gob, etc. 19
Question 534; solution par M. Gob 53
Question 541; solution par MM. Beyens, Boedt, etc. 54
Question 542; solution par MM. Déprez, Boedt, etc. 75
Question 483; solutions par MM. Mosnat, Déprez, etc. 100
Question 487; solution par MM. Mosnat, Boedt, etc. 102
Question 471; solution par M. Beyens 121
Question 479; solution par M. Mosnat 122
Question 537; solution par MM. Verniory, Gob, etc. 123
Question 536; solutions par MM. Mineur, Beyens, etc. 143
Question 550; solutions par MM. Déprez et G. Russo. 145
Question 465; solution par M. J. Neuberg 162
Question 555; solution par MM. Beyens, Stuyvaert, etc. 169
Question 425; solutions par MM. Mosnat et Meurice 196
Question 470; solutions par MM. Déprez et Jerábek 202
Question 466; solutions par MM. Boedt, Servais, etc 234
Question 467; solution par M. Boedt. 255
Question 556; solution par Mlle Bouwmeester, etc. 260
Question 442; solution par M. Van Dorsten. 276
Question 567; solution par M. J. Neuberg 277
Question 570; solutions par MM. Emmerich, Meurice, etc. 278

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

Sur les normales d'angle α; par M. H. Schoute 38
Sur la théorie des foyers; par un abonné 91
Sur les transformations birationnelles quadratiques; par M. P. Mansion . . 110
Théorèmes sur la parabole; par M. Bergmans 136
Sur l'hyperbole de Kiepert; par M. M'Cay. 208
Applications de la théorie des rayons vecteurs réciproques 138, 155

Digitized by Google

Pages.
Asymptotes de l'hyperbole de Kiepert, par M. Laisant 245
Quelques propriétés du triangle; par M. Maurice d'Ocagne 265
Question 389; solutions par MM. Déprez, Gob, etc. 20
Question 354; solution par M. Neuberg 48
Question 514; solutions par MM. Klompers, Verniory, etc. 52
Question 369; solutions par MM. Déprez, Verniory, etc. 69
Question 389; solution par M. Pisani 70
Question 542; solution par MM. Déprez, Boedt, etc. 75
Question 397; solution par M. Verniory. 97
Question 432; solutions par MM. Mosnat, Farisano, etc. 98
Question 142; solutions par MM. Van den Berg et Liénard 118, 190
Question 324; solution par M. Mosnat 120
Question 468; solution par M. Déprez 163
Question 526; solutions par MM. Brocard, Renkin. etc. 164
Question 367; solutions par MM. Mosnat, Keelhoff et Jamet 194
Question 523; solutions par MM. Blondeel, Mosnat, etc. 203
Question de concours de l'école navale (n° 3) 220
Question 544; solutions par MM. Brocard, Déprez, etc. 236
Question 551; solutions par MM. Laurens, Stuyvaert, etc. 237
Question 553; solution par M^lle Bouwmeester, etc. 238
Question 467; solution par M. Déprez 256
Question 568; solutions par MM. Mandart, Déprez, etc. 260

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Propriétés de la courbe d'Agnesi; par M. Mister 5
Interprétation géométrique de la transformation birationnelle quadratique; par M Cl. Servais. 129, 187
Les coordonnées cycliques; par M. M. d'Ocagne 148
Génération linéaire de quelques courbes à éléments multiples; par M. Fr. Deruyts 241
Sur un mode de génération de la spirale hyperbolique; par M. H. Schoentjes. 248
Question 488; solutions par MM. Jamet et Servais 49, 72
Question 369; solution par MM. Déprez et Verniory, etc. 69
Question 358; solution par M. Brocard 139
Question 392; solution par MM. Gob et Déprez 141
Question 529; solutions par MM Brocard et Neuberg. 167
Question de concours de 1887 à l'École polytechnique de Paris; solution par MM. Neuberg et Brocard. 182
Question 260; solution par M. Mosnat 191
Question 347; solution par M. Mosnat 193
Question 426; solution par M. Neuberg 198
Question 237; solution par Mosnat et MM Falisse 231
Question 400; solution par M. Mantel 232
Question 540; solutions par MM Mandart, Verniory, etc. 235
Question 381; solution par MM. Jeřábek, Derousseau, etc. 252

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Propriétés de la courbe d'Agnesi; par M. Mister 5
Remarques de géométrie infinitésimale (et sol. de la question 461); par M. E. Cesáro 25
Nouvelle expression du rayon de courbure d'une courbe plane; par M E. Wasteels 63
Sur la rectification de quelques courbes remarquables; par M G. De Longchamps 127, 170
Questions de licence; par M. H. Brocard 135
Fonction continue sans dérivée de Weierstrass (P. M.) 222

Digitized by Google

	Pages.
Question 134; solutions par MM. Neuberg et Mister	17
Question 374; solution par M. Derousseau	250
Question 325; solutions par MM. Meurice, Mantel et Neuberg	273

BIBLIOGRAPHIE; BIOGRAPHIE; VARIÉTÉS.

Leboulleux. Déterminants (G. de Longchamps et P. M.)	66
J. Neuberg. Systèmes de tiges articulées (P. M.)	93
A. Capelli, G. Garbieri. Corso di Analysi algebrica	93
L. Lecointe. Algèbre élémentaire	94
J. Tannery. Théorie des fonctions d'une variable	95
J. Derousseau. Algèbre pure et appliquée (P. M.)	95
Chrétien-Henri Nagel (d'après M. O. Krimmel)	114
Koehler. Exercices de géométrie analytique etc. (J. N.)	115
Despeyroux-Darboux. Mécanique (Ph. Gilbert)	156
Laisant. Equipollences (H. Brocard)	184
Rémond. Résumé de géométrie analytique	185
Gasco. Tablas de logarithmos, etc.	186
Ph. Gilbert. Cours d'Analyse infinitésimale (P. M.)	225
Cl. Thiry. Sur le théorème de Stewart (J. N.)	226
J. De Meyst et A. Knops. Décomposition des expressions algébriques	227

SUPPLÉMENTS (120 PAGES).

P. Mansion. Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss.	1-16
J. M. De Tilly. Recherches sur les équations différentielles linéaires du second ordre	1-96
H. Brocard. Propriétés d'un groupe de trois paraboles (avec 2 planches)	1-8

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions d'examens (301-350) . . 23, 55, 103, 125, 147, 175, 205, 239, 262, 279	
Ecole polytechnique de Paris. Question de concours de 1887. Solution par MM. Neuberg et Brocard	182
Ecole navale. Concours de 1887	220

QUESTIONS (*).

	Posée T. I, p.	Résol. T. VII, p.
3	12	
17	30	
26	48	R
32	62	
×34	62	
×92, 93	206	77, 79
95	206	
Tome II		
119	71	R
120	71	
134	119	17
×142	120	118, 190
160	159	R
162	159	R
173	176	96

	Posée T. II, p.	Résol. T. VII, p.
174	176	96
195	231	
196	231	
Tome III		
×203	23	R
206	23	
209	24	R
232	72	231
×242	95	
×243	118	
252	143	
260	160	191
267	175, 192	
273	192	
×281	216	

	Posée T. III, p.	Résol. T. VII, p.
283	231	
×288	232	68
293	232	
294	248	R
296	248	R
Tome IV		
310	48	R
317	71	
×318	71	
323	94	
324	94	120
325	94	273
×333	119	
×346	143	R
347	143	193

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions marquées de la lettre R; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les autres questions.

Digitized by Google

	POSÉE T. IV, p.	RÉSOL. T.VII, p.
353	159	R
354	159	48
355	159	R
×356	159	
×357	159	
358	159	139
367	199	194
369	200	69
×371	200	120
374	215	250
381	216	252
×382	216	19
×383	231	
×384	231	
×385	231	
×386	231	
387, 2°	231	
388	246	20
389	246	70
390	247	R
391	247	R
392	247	141
394	247	R
×395	247	22
396	245	R
397	248	97
400	248	232
	Tome V	
×402	22	R
405	22	R
410	22	R
411	23	
412	23	
414	46	R
415	46	R
416	46	R
418	47	
×425	70	195
×426	70	197
428	70	R
429	94	R
430	94	R
432	94	98
433	94	R
435	94	R
436	94	R
439	119	R
440	119	R
×442	143	276
445	143	R
446	144	R
452	167	R
454	167	R
455	167	
×456	167	R
457	192	R
458	192	200

	POSÉE T. V, p.	RÉSOL. T.VII, p.
459	192	R
461	192	26
462	192	R
463	192	R
×464	215	255
×465	215	162
×466	215	294
467	215	256
468	215	163
×469	215	99
470	215	202
×471	215	191
472	215	R
473	238	R
×475	238	163
479	239	122
×483	263	100
×487	263	102
488	263	49, 72
490	264	R
491	264	R
493	280	
494	280	R
497	280	
×498	280	R
499	280	177
	Tome VI	
502	23	257
503	23	R
×504	23	R
505	23	R
508	47	R
509	47	R
×513	71	
514	96	52
517	96	R
519	119	
521	119	R
522	144	R
523	144	203
525	144	R
526	168	164
×528	168	73
529	168	167
531	192	R
532	192	
×534	216	53
535	216	R
×536	216	143
×537	216	123
×538	240	144
539	240	R
540	240	235
×541	240	54
542	240	75
×543	264	R
544	264	236

	POSÉE T. VI, p.	RÉSOL. T.VII, p.
×545	264	R
546	280	R
547	280	124
×548	280	R
×549	280	
×550	280	145
	Tome VII	
551	24	237
552	24	
×553	24	238
×554	24	R
×555	24	169
×556	56	260
×557	56	R
558	56, 75	
×559	56	R
×560	56	146
×561	76, 87	R
×562	76	
563	76	R
564	76	R
565	104	R
566	104	
×567	104	277
×568	104	260
569	126	R
×570	126	278
×571	126	
572	126	R
×573	148	261
×574	148	
575	148	R
576	169	R
×577	170	R
×578	170	R
579	170	R
×580	206	R
581	207	R
×582	207	R
583	207	R
584	207	R
×585	207	R
×586	207	R
587	208	R
×588	240	R
×589	240	R
590	240	
×591	240	
×592	240	R
593	264	R
594	264	
×595	264	R
×596	264	R
597	280	
598	280	
×599	280	
×600	280	

Digitized by Google

QUESTIONS

extraites de la *Nouvelle Correspondance Mathématique* et reproduites dans *Mathesis*.

N. C. M.	Mathesis.
N^{os} 80	N^{os} 458 P
81	459 R
98	221 P
102	260 P
107	238 P
108	293
161	353 R
166	597
167	231 P
169	232 P
170	244 P
205	239 P
210	p^r mém.

N. C. M.	Mathesis.
N^{os} 227	N^{os} 239 P
250	291 P
274	434 P
281	427 P
282	435 R
285	436 R
288	426 P
289	425 P
306	576 R
323	256 P
374	313 P
399	292 P
410	461 P

N. C. M.	Mathesis.
N^{os} 510	N^{os} 204 P
511	206
513	209 R
569	309 P
581	468 P
582	490 R
588	460 P
590	p^r mém.
614(*).	493

(*) Dernière question de la N. C. M. P et R désignent les solutions publiées ou reçues.

NOTE. Une solution de la question 210 de la N. C. M. a été indiquée dans *Mathesis*, II, p. 248. — L'énoncé 166 de la N. C. M. a été reproduit dans les N. A. M. (3) IV, 1885, p. 391 sous le n° 1532. — La question 343 (Dobinski) de la N. C. M. a été résolue dans les N. A. M. (3) IV, 1885, p. 38-39 par M. E. Cesáro. — La question 382 (E. Lemoine) de la N C. M. est retirée (Congrès de Grenoble. Supplément à *Mathesis*, mai 1886, p. 19). — La question 404 de la N. C. M. a été résolue dans les N. A. M (2), XX, 1881, p. 231-235 par M. E. Fauquembergue. — La question 590, résolue déjà dans la N. C. M. (VI, 1880, p. 128) a été reproduite dans les N. A. M. sous le n° 1373 ((2) XX, 1881, p. 383) et résolue *ibid.*, p. 523 ainsi que dans *Mathesis*, V, 128, § I. — La question 441 de la N. C. M. a été résolue dans les N. A. M. (3) II, 1883, p. 413-415 par M. E. Fauquembergue. — La question 83 de la N. C. M. a été reproduite sous le n° 1207 dans les N. A. M. (2) XV, 1876, p. 240 et 550-555. — Sur les questions identiques 57 et 222 de la N. C. M., on peut consulter une note des N. A. M., I, 1843, p. 87 et considérer ces questions comme résolues. — La question 141 (E. Lucas) de la N. C. M. a été résolue partiellement par M. E. Catalan, dans les N. A. M., 1878, (2) XVII, p. 253 et dans les *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*. La question 166 de la N. C. M. a été insérée aussi dans les N. A. M., 1885, (3), IV, p. 391, sous le n° 1532.

Digitized by Google

TABLE DES NOMS.

Abonné, 91.
Agnesi, 91.
Alembert (d'), 157.
Allersma, 97, 265.
Apollonius, 97.
Artzt, 16, 214.
Aviso (d'), 92.
Baker, 56.
Barbarin, 139.
Bastin, 72, 98.
Bellavitis, 184.
Bergmans, 22, 136.
Bernoulli (Daniel), 157.
Bernoulli (Jean), 191.
Bertrand (de l'Institut), 35, 158, 175.
Besso, 24.
Beyens (Cadix), 53, 54, 75, 121, 144, 169, 237, 260.
Binet, 160.
Blondeel, 53, 203.
Boedt, 54, 75, 99, 102, 165, 178, 190, 234, 235, 237, 238, 255, 278.
Boïje af Gennäs, 179.
Boncompagni, 92, 201.
Bonnet (G.), 260, 278.
Bonnet (O.), 158.
Bordage, 104.
Boubals, 57, 104, 117, 194.
Bourget, 57, 147, 180.
Bouwmeester (M^lle), 238, 260.
Braikenridge, 241.
Brasseur, 54.
Breton (de Champ), 192.
Brianchon, 186.
Briot et Bouquet, 173.
Brocard, 11, 16, 52, 57, 73, 98, 99, 103, 104, 105, 106, 110, 114, 135, 139, 143, 146, 164, 167, 168, 183, 185, 191, 192, 193, 207, 210, 212, 213, 218, 231, 236, 237, 246, 250, 266, 272, 280 et III^e supplément.
Brill, 240.
Buchheim, 63.
Cambier, 190.
Capelli, 93.
Carnot, 18, 186.
Carvallo, 228.
Casey, 14, 75, 116, 156, 209.
Catalan, 44, 84, 120, 123, 126, 144, 146, 147, 148, 191, 193, 207, 230, 245.
Cauchy, 157, 184, 192.
Cayley, 193.
Chasles, 27, 186, 226, 242.
Choisis, 146.
Cesáro (E.), 25, 177, 245, 257, 271, 280.
Christensen, 179.
Clarke, 16, 170.
Collin, (Jules), 163.
Crelle, 115, 155, 192.
Cremona, 133.
Dandelin, 186.
Darboux, 156, 157, 158, 184, 194.
Dawson, 240.
Deceunynck, 101.
Delbœuf, 44, 279.
Demeyst, 227
Demoulin, 235.
Déprez, 19, 20, 21, 46, 53, 54, 55, 69, 72, 75, 98, 99, 101, 102, 119, 121, 123, 141, 143, 144, 145, 163, 165, 166, 168, 190, 192, 193, 197, 202, 204, 232, 235, 236, 237, 238, 245, 252, 256, 260, 262, 277, 278.
Derousseau, 95, 250, 252.
Deruyts (Fr.) 241.
Desargues, 133, 186.
Desboves, 230.
Despeyrous, 156.
Dewulf, 148, 240.
D'Hondt, 17.
Dostor, 228.
Droz, 237, 238, 260.
Duhamel, 156.
Emmerich, 146, 169, 237, 246, 260, 261, 272, 277, 278.
Euler, 11, 95, 115, 270.
Falisse (Fr.), 194, 231.
Farisano, 17, 21, 54, 99, 117, 138, 143, 164, 203, 234, 256.
Fauquembergue, 49, 72, 96, 120, 146, 163, 200, 257.
Feuerbach, 115.
Fermat, 79.
Garbieri, 93.
Gasco, 186.
Gauss, 84, 186.
Genaille, 46.
Gergonne, 57, 75, 84.
Gerondal, 162.
Gilbert (Ph.), 156, 195, 225.
Gillet, 99, 121.
Gob, 19, 20, 21, 24, 53, 54, 72, 123, 165, 235, 237.
Goldschmidt, 54.
Gournerie (de la), 160.
Graves, 24.
Greenhill, 160.
Grunert, 20, 57, 62, 171.
Haecken, 124, 237.
Halphen, 158.
Hain, 6.
Hamilton, 157, 184.
Hammond, 163.
Hart, 93, 158.
Harnichmacher, 57.
Henry, 92.
Hermite, 66.
Hess, 159.
Hirst, 129, 190.
Hochheim, 57, 89.
Holditch, 158.
Hoppe, 62, 171, 263.
Houël, 184.
Hudelot, 46.
Ivory, 159, 160.
Jacobi (C. F.), 115.
Jacobi (C. G. J.), 158, 160.
Jacoli, 92.
Jamet, 43, 49, 127, 128, 162, 194, 205, 240.
Jenkins, 202.
Jeřábek, 126, 203, 252.
Joachimsthal, 38, 42, 43, 158.
Keelhoff, 194.
Kempe, 93.

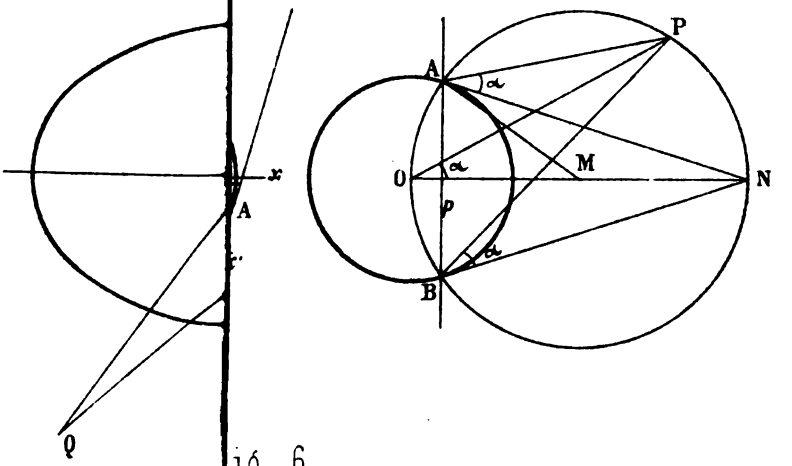
Digitized by Google

Kiepert, 208, 245.
Klompers, 52, 53, 54, 123, 146, 237, 260.
Kluyver, 232.
Knops, 227.
Koehler, 115, 117.
Knowles, 16, 206, 263.
Krimmel, 115.
Lagrange, 157.
Laguerre, 43.
Laisant, 26, 27, 53, 56, 64, 180, 184, 245, 271, 272, 275.
Lambert (Alph.).
Landry, 46.
Laquière, 184.
Laurens, 54, 104, 123, 124, 237, 277.
Lebel, 49.
Leboulleux, 66.
Lecointe (L.), 94
Legendre, 96, 190, 258
Leibniz, 270.
Le Lasseur, 74.
Lemoine (E.), 11, 20, 24, 56, 57, 75, 76, 84, 105, 107, 117, 148, 161, 165, 170, 210, 238, 246, 261, 280.
Léonard de Pise, 202.
Leudesdorf, 100.
Liénard, 190.
Liguine, 158.
Lipkine, 93.
Longchamps (de), 11, 12, 44, 56, 57, 66, 105, 109, 117, 127, 170, 183, 260.
Loof, 74.
Lucas (Ed.), 45, 68, 74, 76, 92, 97, 200, 201, 207.
Mac Laurin, 93, 95, 241.
Mc. Cay, 208, 272.
Mac-Lellan, 276.
Malfatti, 24.
Mandart, 17, 125, 126, 138, 163, 204, 235, 237, 260.
Mansion, 39, 66, 67, 77, 79, 90, 93, 94, 95, 110, 114, 186, 222, 226, 228 et 1er suppl.
Mantel, 232, 275.
Markoff, 84.
Mathieu, 7.
Mendoza, 186.
Mennesson, 25.
Meurice, 54, 68, 75, 126, 162, 166, 195, 203, 236 237, 238, 273, 278, 279.
Mineur, 22, 53, 54, 113.
Miller, 16.
Minoliti, 23, 278.
Mister, 5. 17, 18.
Mosnat, 54, 70, 98, 100, 102, 120, 122, 124, 126, 143, 191, 193, 194, 195, 203, 231, 237, 260, 277.
Nagel, 11, 57, 84, 114.
Neuberg, 14, 20, 39, 43, 48, 58, 69, 70, 75, 93, 101, 105, 107, 108, 110, 114, 116, 117, 120, 122, 135, 141, 147, 155, 158, 161, 168, 170, 171, 176, 181, 183. 192, 200, 205, 207, 209, 214, 216, 217, 227, 234, 240, 245, 252, 263, 264, 271, 273, 275, 277, 280.
Nicoli, 24, 169.
Novarese, 228.
Ocagne (d'), 103, 107, 148, 265.
Oltramare, 272.
Pascal, 93, 186, 235.
Pappus, 155, 271.
Peaucellier, 93.
Pelz, 42, 43, 44.
Pepin, 97, 202.
Pisani, 19, 21, 22, 70.
Pleyers, 165.
Poinsot, 159, 160.
Pontelet, 116.
Posé, 84.
Prouhet, 191.
Puiseux, 157, 159.
Realis, 96.
Reiss, 192.
Remond, 185.
Renkin, 165.
Reuschle, 11, 74, 115.
Roberts, 93.
Roberts (S.), 134.
Roberts (W.), 193.
Rochetti, 197.
Rocquigny (de), 16, 53, 56, 146, 167, 264.
Rolle, 94.
Russo, 145, 146, 165, 279.
Salmon, 110, 191.
Sarkas, 125.
Scheiner, 93.
Schoentjes, 248.
Schoute, 38, 48, 69, 171, 190.
Schwartz, 124.
Schwering, 193.
Seelhof, 45.
Serret (A.), 175.
Servais, 72, 90, 110, 129, 170, 187, 205, 228, 234, 236, 245.
Sparre (de), 159.
Steiner, 41, 155, 158, 203, 214, 226.
Stewart (A.), 146.
Stewart, 226.
Stuyvaert, 169, 260, 261, 278.
Sylvester, 66, 93, 97, 160.
Tait, 14.
Tannery (J.), 94, 95.
Taylor, 94, 95.
Tarry, 14, 216.
Tchebychef, 84.
Tchirnhausen, 270.
Tesch (W.), 38, 39, 42, 117, 219.
Thiry, (Cl.), 68, 116, 147, 165, 203, 226, 237, 278, 279.
Tilly (De), IIe supplém.
Todhunter, 170.
Tortolini, 193.
Tucker, 12, 99, 105, 107, 245.
Van Aubel (H.), 245, 278.
Vandenberg, 118, 190.
Van Swinden, 115.
Van Dorsten, 161, 276.
Vereecke, 278.
Verniory, 21, 52, 53, 54, 69, 75, 97, 99, 100, 102, 123, 142, 143, 162, 165, 169, 204, 234, 235, 237, 257.
Vigarié, 6, 57, 84, 105, 170, 264, 280.
Vuibert, 147, 175, 176, 263.
Wasteels, (E.), 63, 180, 230.
Weidenholzer, 62.
Weierstrass, 160, 222.
Wiener, 224.
Woolhouse, 214.
Wronski, 95.

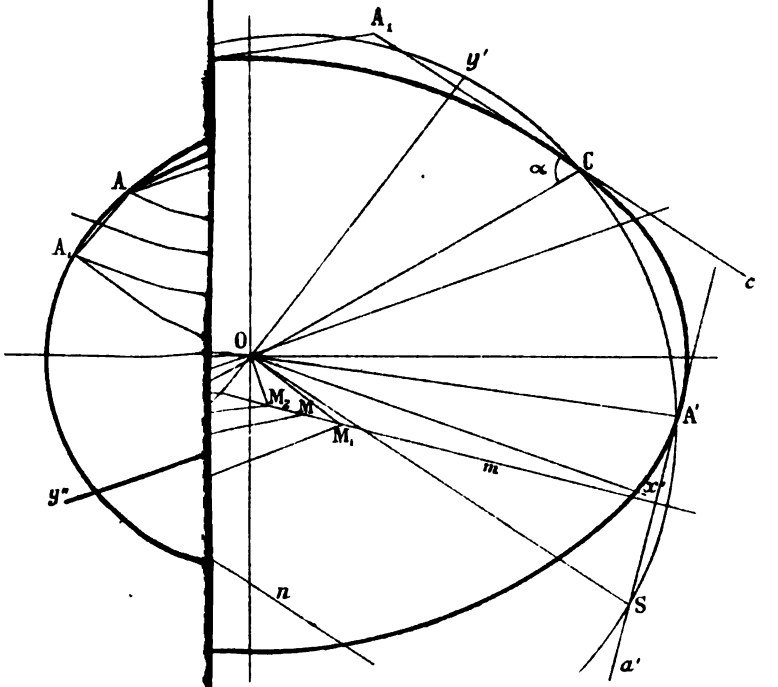
Digitized by Google

Fi

Fig 5.



ig. 6.



Digitized by Google

Digitized by Google

DÉTERMINATION DU RESTE

DANS

LA FORMULE DE QUADRATURE DE GAUSS

PAR

P. MANSION

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE GAND, MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE (*).

I.

PRÉLIMINAIRES.

1. *Objet de cette note.* GAUSS a fait connaître, en 1814, la célèbre formule de quadrature qui porte son nom. Depuis lors, elle a été l'objet des travaux de plusieurs géomètres : JACOBI, CHRISTOFFEL, MEHLER, CATALAN, etc., qui ont simplifié ou généralisé la solution des questions traitées par GAUSS (**). Mais, jusqu'à présent, aucun auteur, que nous sachions, n'a donné, *sous forme finie,* une expres-

---

(*) Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3me série, t. XI, n° 4; 1886, pp. 293-307.

(**) Voir le résumé de ces recherches dans HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, Zweite Auflage (Berlin, Reimer), t. II, 1881, pp. 1-31. Le mémoire de M. Catalan : *Note sur la quadrature des courbes paraboliques*, présenté à la Classe des sciences le 7 octobre 1880 et publié dans le t. XLIII des *Mémoires de l'Académie de Belgique*, n'a pu être utilisé par Heine.

Digitized by Google

sion de l'erreur commise en employant la formule de quadrature de l'illustre géomètre de Gœttingue.

Nous nous proposons de montrer, dans cette Note, qu'il est possible d'arriver à une expression simple du reste, dans la formule de GAUSS, en partant de la formule d'interpolation de NEWTON et en s'appuyant sur une propriété des *fonctions interpolaires*, qui ne semble pas avoir été remarquée. Nous avons démontré cette propriété dans les *Comptes rendus* (t. CII, n° 8, 22 février 1886, pp. 422-425), en nous servant de la théorie des résidus de CAUCHY; mais on peut l'établir d'une manière assez élémentaire, sans recourir à la théorie des intégrales des fonctions d'une variable imaginaire, comme on le verra plus bas.

Les procédés de démonstration, employés dans cette Note, s'étendent à des questions plus générales, par exemple à une formule de quadrature nouvelle basée sur la *Loi suprême aux différences* de WRONSKI. Aussitôt que nos loisirs nous le permettront, nous reviendrons sur diverses questions que l'on peut ainsi rattacher à la formule de quadrature de GAUSS, et nous donnerons des renseignements bibliographiques complets sur les travaux antérieurs des géomètres (*).

2. *Notations.* Dans tout ce qui suit, nous désignons par Fx une fonction réelle de la variable réelle x, continue, ainsi que toutes celles de ses dérivées que nous employons, pour les valeurs de x considérées et pour toutes les valeurs intermédiaires.

(*) Voir à la fin de cette note, l'indication de nos recherches antérieures sur l'approximation des intégrales définies.

Digitized by Google

Nous supposons connue la formule de Taylor, avec les formes du reste, données par LIOUVILLE et par LAPLACE :

$$FX = Fx + \frac{X-x}{1}F'x + \frac{(X-x)^2}{1.2}F''x + \cdots + \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2.(n-1)}F^{n-1}x + \rho,$$

$$\rho = \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots n}(F^n x + \varepsilon)$$

$$= \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^1 (1-t)^{n-1}F^n[x + t(X-x)]dt,$$

ε ayant pour limite zéro en même temps que $X - x$; puis la formule *générale* d'interpolation de NEWTON (*) :

$$\begin{aligned} Fx = A &+ B(x - x_1) + C(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ &+ L(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \\ &+ (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)P(x). \end{aligned}$$

La quantité A est égale à Fx_1. Quant à B, C, ..., L, P (x), ce sont les expressions appelées *fonctions interpolaires* par AMPÈRE et définies par les relations suivantes :

$$B = F(x_1, x_2) = \frac{Fx_1 - Fx_2}{x_1 - x_2}, \quad F(x_1, x_3) = \frac{Fx_1 - Fx_3}{x_1 - x_3}; \text{ etc.}$$

$$C = F(x_1, x_2, x_3) = \frac{F(x_1, x_2) - F(x_1, x_3)}{x_2 - x_3},$$

$$F(x_1, x_2, x_4) = \frac{F(x_1, x_2) - F(x_1, x_4)}{x_2 - x_4}; \text{ etc.}$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{F(x_1, x_2, x_3) - F(x_1, x_2, x_4)}{x_3 - x_4}; \text{ etc.}$$

(*) Cette formule générale étant peu connue, surtout avec le reste de CAUCHY, nous la donnons en appendice.

Digitized by Google

On trouve aisément, de proche en proche, la formule suivante, due à AMPÈRE :

$$L = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{Fx_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{Fx_n}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})},$$

et de même, pour la fonction interpolaire suivante, qui contient x de plus,

$$P(x) = \frac{Fx}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} + \frac{Fx_1}{(x_1-x)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{Fx_n}{(x_n-x)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

Si l'on décompose la première fraction du second membre en fractions simples, on trouve

$$P(x) = \frac{\left(\frac{Fx_1-Fx}{x_1-x}\right)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + \frac{\left(\frac{Fx_n-Fx}{x_n-x}\right)}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} \quad (A)$$

Enfin, d'après un théorème dû à CAUCHY et démontré d'une manière simple et rigoureuse par M. H. SCHWARTZ (*Atti* de l'Académie de Turin, 1881-1882, XVII, pp. 740-742), on a

$$P(x) = \frac{F^n\xi}{1.2.3\ldots n}, \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

ξ étant une valeur intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des valeurs $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, qui servent à former $P(x)$.

Digitized by Google

II.

Dérivées d'ordre quelconque de la fonction

$$\psi x = \frac{FX - Fx}{X - x}.$$

3. *Cas où* x *est différent de* X. On a, par le théorème de Leibniz,

$$\psi^p x = D^p(FX - Fx)(X - x)^{-1} =$$

$$(FX-Fx)\times 1.2...p(X-x)^{-p-1} + \frac{p}{1}(-F'x)\times 1.2...(p-1)(X-x)^{-p}$$

$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}(-F''x)\times 1.2...(p-2)(X-x)^{-p+1} + \cdots + (-F^p x)(X-x)^{-1}$$

$$= \frac{1.2...p}{(X-x)^{p+1}}\left[FX - Fx - \frac{X-x}{1}F'x - \frac{(X-x)^2}{1.2}F''x - \cdots - \frac{(X-x)^p}{1.2...p}F^p x\right].$$

La quantité entre parenthèses, d'après la formule de Taylor, complétée par le reste de Laplace, est égale à

$$\frac{(X-x)^{p+1}}{1.2...p}\int_0^1 (1-t)^p F^{p+1}[x + t(X-x)]dt.$$

Donc, enfin,

$$\psi^p x = \int_0^1 (1-t)^p F^{p+1}[x + t(X-x)]dt \quad . \quad . \quad (1)$$

Si, au lieu de l'expression du reste de Laplace, on emploie celle de Liouville, on trouve

$$\psi^p x = \frac{F^{p+1}x}{p+1} + \frac{(X-x)}{(p+1)(p+2)}(F^{p+2}x + \varepsilon), \quad . \quad . \quad (2)$$

en faisant $n = p + 2$, dans la formule rappelée au n° 2

Digitized by Google

COROLLAIRE. On déduit de là

$$\frac{\psi^p x - \dfrac{F^{p+1}X}{p+1}}{x-X} = \frac{F^{p+1}x - F^{p+1}X}{(p+1)(x-X)} - \frac{F^{p+2}x + \varepsilon}{(p+1)(p+2)}$$

et, à la limite, en faisant tendre indéfiniment x vers X,

$$\lim \frac{\psi^p x - \dfrac{F^{p+1}X}{p+1}}{x-X} = \frac{F^{p+2}X}{p+1} - \frac{F^{p+2}X}{(p+1)(p+2)} = \frac{F^{p+2}X}{p+2}. \quad (3)$$

4. *Cas où* x *est égal à* X. Pour cette valeur particulière, on a $\psi X = F'X$. On ne peut évidemment, dans ce cas particulier, trouver les dérivées de ψx au moyen des calculs du n° 3. Mais on les obtient aisément en s'aidant de la formule (3). D'après la définition même d'une dérivée,

$$\psi' X = \lim \frac{\psi x - \psi X}{x-X} = \lim \frac{\left(\dfrac{Fx - FX}{x-X}\right) - F'X}{x-X}$$

$$\lim \frac{Fx - FX - (x-X)F'X}{(x-X)^2} = \lim \frac{\frac{1}{2}(x-X)^2\left[F''X + \varepsilon\right]}{(x-X)^2} = \frac{F''X}{2}.$$

On a ensuite, d'après la formule (3),

$$\psi'' X = \lim \frac{\psi' x - \psi' X}{x-X} = \lim \frac{\psi' x - \frac{1}{2}F''X}{x-X} = \frac{1}{3}F'''X,$$

$$\psi''' X = \lim \frac{\psi'' x - \psi'' X}{x-X} = \lim \frac{\psi'' x - \frac{1}{3}F'''X}{x-X} = \frac{1}{4}F^{IV}X,$$

et ainsi de suite. En général,

$$\psi^p X = \frac{F^{p+1}X}{p+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

COROLLAIRE. En faisant tendre x vers X dans la for-

Digitized by Google

mule (2), on trouve

$$\lim \psi^p x = \frac{F^{p+1}X}{p+1} = \psi^p X.$$

Donc *les dérivées de* ψx *sont des fonctions continues, même pour* $x = X$. De plus, la formule (1) est vraie, même pour $x = X$. En effet, dans cette hypothèse, elle donne

$$\psi^p X = \int_0^1 (1-t)^p F^{p+1}X\, dt = F^{p+1}X \int_0^1 (1-t)^p dt = \frac{F^{p+1}X}{p+1},$$

ce qui est exact, d'après la formule (4).

La formule (1) peut donc être employée pour toutes les valeurs de x.

III.

Dérivée d'ordre quelconque d'une fonction interpolaire.

5. *Première méthode.* La formule (1) du § II nous donne immédiatement pour la dérivée $p^{ième}$ de l'expression $P(x)$ du n° 2, mise sous la forme (A) :

$$P^p(x) =$$

$$\int_0^1 (1-t)^p \left\{ \frac{F^{p+1}[x+t(x_1-x)]}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \frac{F^{p+1}[x+t(x_n-x)]}{(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \right\} dt.$$

Posons, pour abréger,

$$fy = F^{p+1}[x + t(y-x)],$$

ce qui entraîne

$$f^{n-1}y = F^{n+p}[x + t(y-x)]\, t^{n-1}.$$

La quantité entre parenthèses, sous le signe intégral, pourra s'écrire

$$\frac{fx_1}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \frac{fx_n}{(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})},$$

Digitized by Google

et sera la fonction interpolaire formée au moyen de la fonction fy et des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de y. D'après le théorème (B), du n° 2, elle sera donc égale à

$$\frac{f^{n-1}\eta}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{F^{n+p}\left[x + t(\eta - x)\right]t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)},$$

η étant une valeur de y, fonction de t probablement, comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de y. Nous avons donc

$$P^p(x) = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^1 (1-t)^p\, t^{n-1}\, F^{n+p}\left[x + t(\eta - x)\right]dt.$$

Quand t varie de 0 à 1, $F^{n+p}[x + t(\eta - x)]$ reste compris entre une valeur maxima M et une valeur minima m. Par suite, $P^p(x)$ est compris entre les produits de M et m par

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^1 (1-t)^p t^{n-1}dt = \frac{1.2\ldots p \times 1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(n-1)\times 1.2\ldots(p+n)}$$

$$= \frac{1}{(p+1)\cdots(p+n)}.$$

Entre M et m, $F^{n+p}x$ varie continuement. Il y a donc une valeur ξ telle que

$$P^p(x) = \frac{F^{n+p}\xi}{(p+1)\ldots(p+n)}, \quad \ldots \quad (C)$$

formule fondamentale à laquelle nous voulions arriver.

6. *Seconde méthode.* Pour en confirmer l'exactitude, nous allons reproduire sommairement la démonstration publiée dans les *Comptes rendus*. Toutes les intégrales con-

Digitized by Google

sidérées dans ce numéro sont prises le long d'un contour enveloppant les points ayant pour abcisses $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$; Fz est supposé synectique le long et à l'intérieur de ce contour.

On trouve sans peine, de proche en proche, la formule suivante, due à M. Peano (*Atti* de l'Académie de Turin, 1882-1883, t. XVIII, pp. 573-574) :

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{Fz\,dz}{(z-x)(z-x_1)\ldots(z-x_n)}.$$

Par suite,

$$P^p(x) = \frac{1.2.3\ldots p}{2\pi i} \int \frac{Fz\,dz}{(z-x)^{p+1}(z-x_1)\ldots(z-x_n)}.$$

L'expression du second membre diffère, aussi peu qu'on le veut, de

$$\frac{1.2.3\ldots p}{2\pi i} \int \frac{Fz\,dz}{(z-x)(z-y_1)\ldots(z-y_p)(z-x_1)\ldots(z-x_n)}$$

$y_1, y_2, \ldots, y_p$ étant des quantités suffisamment voisines de x. Or, la dernière intégrale, divisée par $2\pi i$, est la fonction interpolaire $F(x, y_1, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_n)$, et celle-ci, d'après la formule (B) du n° 2, est égale à

$$\frac{F^{p+n}\xi_1}{1.2\ldots(p+n)},$$

ξ_1 étant une valeur intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des valeurs $x, y_1, y_2, \ldots y_p, x_1, x_2, \ldots, x_p$. On a donc enfin, en faisant tendre $y_1, y_2, \ldots y_p$ vers x,

$$P^p(x) = \frac{F^{p+n}\xi}{(p+1)\ldots(p+n)},$$

ξ étant la limite de ξ_1. C'est la formule (C) du n° 5.

Digitized by Google

IV.

Formule de quadrature de Gauss.

7. Lemme. *L'équation* $D_x^n (x^2 - 1)^n = 0$ *a* n *racines réelles et inégales, comprises entre* -1 *et* $+1$ (*). Les dérivées successives de la fonction $\varphi x = (x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$ s'obtiennent par la formule de Leibniz. On trouve

$$\varphi' x = (x-1)^n . n(x+1)^{n-1} + n(x-1)^{n-1} (x+1)^n,$$
$$\varphi'' x = (x-1)^n . n(n-1)(x+1)^{n-2} + 2n(x-1)^{n-1} . n(x+1)^{n-1} + n(n-1)(x-1)^{n-2}(x+1)^n,$$

et ainsi de suite. La fonction $\varphi' x$ contient le facteur $(x^2 - 1)^{n-1}$; de plus, puisque φx s'annule pour $x = -1$, $x = +1$, $\varphi' x$, d'après le théorème de Rolle, s'annule pour une valeur intermédiaire x_{11}. De même, $\varphi'' x$ contient le facteur $(x^2 - 1)^{n-2}$; en outre, puisque $\varphi' x$ s'annule pour $x = -1$, $x = x_{11}$ et $x = +1$, $\varphi'' x$ s'annule pour $x = x_{12}$, valeur comprise entre -1 et x_{11}, et pour $x = x_{22}$, valeur comprise entre x_{11} et $x = 1$.

On prouve, de la même manière, que $\varphi''' x$ est divisible par $(x^2 - 1)^{n-3} (x - x_{13})(x - x_{23})(x - x_{33})$, x_{13}, x_{23}, x_{33} étant compris, respectivement, entre -1 et x_{12}, x_{12} et x_{22}, x_{22} et $+1$. De proche en proche, on arrive à ce résultat : $\varphi^n x$ s'annule pour n valeurs réelles distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, comprises entre -1 et $+1$. Le premier

(*) Théorème connu, dont nous rappelons ici la démonstration élémentaire, parce que Heine, dans le *Handbuch der Kugelfunctionen* (Berlin, Reimer), t. I, 1878, pp. 47-48, en donne une beaucoup trop compliquée. La fonction $\varphi^n x$, à un facteur constant près, est le polynome X_n de Legendre.

Digitized by Google

terme de $\varphi^n x$ a pour coefficient $2n\,(2n-1)\ldots(n+1)$; on a donc

$$\varphi^n x = 2n(2n-1)\ldots(n+1)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

8. Formule de Gauss. La formule d'interpolation de Newton, rappelée au n° 2, peut être écrite en abrégé, comme il suit :

$$Fx = Gx + (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\,P(x),$$

Gx étant le polynome entier

$$A + B(x-x_1) + C(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + L(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Ce polynome, comme on sait, est tel que $Fx_1 = Gx_1$, $Fx_2 = Gx_2$, ..., $Fx_n = Gx_n$. Évidemment (*)

$$\int_{-1}^{1}(Fx - Gx)\,dx = \int_{-1}^{1}(x-x_1)\ldots(x-x_n)\,P(x)\,dx.$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, ..., x_n soient les n racines de $\varphi^n x = 0$. On aura alors

$$\int_{-1}^{1}(Fx - Gx)\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{\varphi^n x\,P(x)\,dx}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}.$$

Intégrons n fois par parties, en observant que les fonctions $\varphi^{n-1}x$, $\varphi^{n-2}x$, ... $\varphi' x$ sont nulles pour $x = \pm 1$. Il viendra

$$\int_{-1}^{1}(Fx - Gx)\,dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_{-1}^{1}\varphi x\,P^n x\,dx$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,P^n(x)\,dx.$$

Quand x varie de -1 à $+1$, $P^n x$ reste compris entre

(*) Si les limites de l'intégrale à calculer sont x_0 et X et non -1 et $+1$, on les y ramène en posant $x = \frac{1}{2}(x_0 + X) + \frac{1}{2}(X - x_0)u$.

Digitized by Google

une valeur maxima $P^n(x_\mu)$ et une valeur minima $P^n(x_m)$. Donc, pour une valeur intermédiaire $P^n(x_\mu)$, on a

$$\int_{-1}^{1}(Fx - Gx)dx = \frac{P^n(x_\mu)}{(n+1)(n+2)\dots 2n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx.$$

D'après la formule (C) du n° 3,

$$P^n(x_\mu) = \frac{F^{2n}\xi}{(n+1)(n+2)\dots 2n},$$

ξ étant une valeur intermédiaire entre -1 et $+1$. D'ailleurs

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots(2n-1)}.$$

Donc enfin, après quelques transformations,

$$\int_{-1}^{1}(Fx - Gx)\,dx = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1.2.3\dots n}{1.3.5\dots(2n-1)}\right)^2\frac{F^{2n}\xi}{1.2.3\dots 2n},$$

ce qui est la formule de Gauss, *avec une forme finie du reste.*

Remarque. Au moyen de la formule d'interpolation de Lagrange, on peut écrire

$$Gx = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}Fx_1 +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}Fx_n.$$

Donc

$$\int_{-1}^{1}Gx\,dx = g_1Fx_1 + \dots + g_nFx_n,$$

$$g_1 = \int_{-1}^{1}\frac{(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\dots(x-x_n)}dx, \text{ etc.,}$$

Digitized by Google

et la formule de Gauss devient

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{F}x\,dx = g_1\mathrm{F}x_1 + g_2\mathrm{F}x_2 + \cdots + g_n\mathrm{F}x_n + \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right)^2 \frac{\mathrm{F}^{2n}\xi}{1.2.3\ldots 2n}.$$

Les coefficients du $g_1, g_2, \ldots g_n$ sont indépendants de la forme de la fonction F. Ils ont été calculés par Gauss, avec un grand nombre de décimales, ainsi que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont ils dépendent, pour les valeurs $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Application. Appliquons la formule précédente à la fonction

$$\mathrm{F}x = \begin{vmatrix} fx & \varphi x & \ldots & \chi x \\ fx_1 & \varphi x_1 & \ldots & \chi x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ fx_n & \varphi x_n & \ldots & \chi x_n \end{vmatrix},$$

nulle pour $x = x_1, \ldots, x_n$. Nous trouverons

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{F}x\,dx = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1.2\ldots n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right)^2 \frac{\mathrm{F}^{2n}\xi}{1.2.3\ldots 2n}.$$

C'est la formule nouvelle de quadrature basée sur la *Loi suprême aux différences* de Wronski dont il est parlé dans les préliminaires.

APPENDICE.

9. Formule générale de Newton, complétée par le reste de Cauchy. Soient u_1, u_2, u_3, u les valeurs que prend une fonction fz pour $z = x_1$, $z = x_2$, $z = x_3$, $z = x$. Posons

$$u_1 = \mathrm{A},$$

$$u_2 = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x_2 - x_1),$$

$$u_3 = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x_3 - x_1) + \mathrm{C}(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$

$$u = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x - x_1) + \mathrm{C}(x - x_1)(x - x_2) + \mathrm{K}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Digitized by Google

Soustrayons la première de ces relations de chacune des suivantes, puis divisons les égalités ainsi obtenues, respectivement par $x_2 - x_1, x_3 - x_1, x - x_1$. En posant

$$\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} = v_2, \quad \frac{u_3 - u_1}{x_3 - x_1} = v_3, \quad \frac{u - u_1}{x - x_1} = v,$$

il viendra

$$v_2 = B,$$
$$v_3 = B + C(x_3 - x_2),$$
$$v = B + C(x - x_2) + K(x - x_2)(x - x_3).$$

Soient encore

$$\frac{v_3 - v_2}{x_3 - x_2} = w_3 \quad \frac{v - v_2}{x - x_2} = w, \quad \frac{w - w_3}{x - x_3} = s.$$

Les relations en B, C, K donneront évidemment

$$w_3 = C, \quad w = C + K(x - x_3),$$

puis

$$s = K.$$

Donc enfin, on pourra écrire

$$fx = u_1 + v_2(x - x_1) + w_3(x - x_1)(x - x_2) + s(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (N)$$

C'est la formule générale de NEWTON. Si fz est une fonction entière $a + bz + cz^2 + kz^3$, $K = s$ est égal à k et est indépendant de x_1, x_2, x_3, x et, par suite, on peut remplacer dans la formule (1) x par z. Les coefficients v_2, w_3, s sont, d'après leur loi de formation, les fonctions interpolaires

$$f(x_1, x_2), \quad f(x_1, x_2, x_3), \quad f(x_1, x_2, x_3, x) (*).$$

(*) En pratique, le calcul en est très rapide, comme on peut s'en assurer sur des exemples, et, à cause de cela, la formule (1) où x est remplacé par z est d'un usage plus facile que la formule équivalente de LAGRANGE :

$$fz = \frac{(z - x_2)(z - x_3)(z - x)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x)} u_1 + \cdots + \frac{(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} u.$$

Digitized by Google

Considérons maintenant la fonction

$$Fz = fz - \left[u_1 + v_2(z - x_1) + w_3(z - x_1)(z - x_2) + s(z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)\right].$$

Elle s'annule pour $z = x_1$, $z = x_2$, $z = x_3$, $z = x$. Par suite, $F'x$ s'annule pour les valeurs x_{12}, x_{23}, x_{34} intermédiaires, respectivement, entre x_1 et x_2, x_2 et x_3, x_3 et x; puis, $F''x$ s'annule pour les valeurs x_{123}, x_{234} intermédiaires entre x_{12} et x_{23}, x_{23} et x_{34}; enfin $F'''x$ s'annule pour une valeur ξ intermédiaire entre x_{123} et x_{234} et, par conséquent, comprise entre la plus grande x_M et la plus petite x_m des valeurs x_1, x_2, x_3, x. Mais

$$F'''z = f'''z - 1.2.3.s.$$

On a donc

$$f'''\xi - 1.2.3.s = 0,$$

c'est-à-dire

$$s = f(x_1, x_2, x_3, x) = \frac{f'''\xi}{1.2.3},$$

ce qui est le théorème de CAUCHY, rappelé au n° 2.

Dans ce qui précède, nous avons supposé implicitement que fz, $f'z$, $f''z$, $f'''z$ sont des fonctions continues depuis $z = x_m$ jusque $z = x_M$.

La formule *générale* de NEWTON a été publiée par l'illustre géomètre dans la *Methodus differentialis* dès 1711, puis dans l'édition des *Principes*, imprimée en 1714 à Amsterdam. Malgré cela, la plupart des auteurs n'attribuent à NEWTON que la formule *spéciale* relative au cas où $x - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ (*).

(*) On lit, par exemple, dans le *Traité d'Analyse* par H. LAURENT (Paris, Gauthier-Villars, 1885), t. I, p. 104 : « Avant Lagrange, Newton a fait connaître une formule d'interpolation fondée sur la théorie des différences, *mais qui suppose essentiellement que les valeurs données de la variable soient en progression géométrique* ». Deux pages plus loin, la formule générale de Newton est attribuée à AMPÈRE.

Digitized by Google

NOTE.

Nous avons publié antérieurement plusieurs notes élémentaires sur les méthodes d'approximation des intégrales définies : 1° *Sur l'évaluation approchée des aires planes* (*Mathesis*, I. pp. 17-22 et 33-36, supplément à la livraison de septembre, et *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1881, V, 2e partie, pp. 251-290); 2° *Sur les cubatures approchées* (*Mathesis*, t. II, supplément, *Ann. Soc. scient Brux.*, 1882, VI, 2e part., pp. 228-232); 3° *Sur l'approximation des intégrales définies et en particulier du périmètre de l'ellipse* (*Mathesis*, t. IV, supplément; *Ann. Soc. scient. Brux.*, 1884, VIII, 2e part, pp. 11-24) ; 4° *Sur les quadratures et les cubatures approchées* (*Comptes rendus de Paris*, 1882, t XCV, pp. 384-385; *Mathesis*, t. IV, supplément). Les trois premières notes contiennent la démonstration, par la géométrie élémentaire, de la formule des trapèzes, de celles de Poncelet, Parmentier, Simpson, Dupain, Catalan, Weddle, Woolley, Jean Bernoulli et Prouhet, et de plusieurs formules nouvelles, *avec la détermination de l'erreur maxima qu'elles comportent.* La quatrième note est un résumé des deux premières. La seule formule importante d'intégration approchée qui ne soit pas étudiée dans ces mémoires, la *formule sommatoire* de Maclaurin et d'Euler, a été l'objet de recherches approfondies de Poisson, Malmsten, etc.

Imprimerie de F. Hayez, Bruxelles.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

RECHERCHES

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

DU SECOND ORDRE (*),

PAR

J.-M. DE TILLY,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE.

La question qui fait l'objet de ce travail est incontestablement l'une des plus importantes que le Calcul intégral offre à l'activité des chercheurs. C'est, en quelque sorte, la première qui s'impose aux géomètres désireux de faire progresser l'Analyse infinitésimale dans l'ordre naturel des difficultés du sujet, c'est-à-dire sans lacune entre les théories connues et les nouvelles théories découvertes.

Le problème de l'intégration des équations linéaires a donné lieu à des travaux aussi nombreux que remarquables; mais, en dehors des équations du premier ordre, que l'on sait intégrer depuis plus d'un siècle, on n'a pu découvrir jusqu'aujourd'hui aucun procédé général, applicable à toutes les équations d'un ordre donné. Même pour le second, les cas d'intégration connus sont très particuliers et très peu nombreux.

Le plus souvent, les efforts se sont portés sur les propriétés générales des équations linéaires. Personne, plus que moi,

(*) Extrait des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique, t. XL, 1886.

Digitized by Google

n'admire les profondes recherches effectuées dans ce sens; mais, appliquées à l'intégration des équations d'ordre quelconque (question qu'elles ne résolvent pas, bien entendu), elles négligent trop les propriétés spéciales des équations linéaires d'ordre inférieur, dont la résolution serait déjà un progrès immense pour l'Analyse, stationnaire sous ce rapport depuis un siècle.

L'Académie royale de Belgique espérait contribuer à la réalisation de ce progrès en mettant au concours, pour 1885, la question de l'intégration des équations linéaires du second ordre (*).

Je tiens à faire observer que cet espoir n'était nullement en contradiction avec le théorème de Liouville (**), d'après lequel l'équation de Riccati (et, par conséquent, aussi sa transformée linéaire du second ordre) ne peut être intégrée exactement que dans des cas limités. Liouville attribue ici à l'intégration exacte un sens qu'il définit parfaitement, mais qui n'est pas le sens ordinaire de cette expression.

Dans tous les Traités de Calcul intégral, sans exception, on considère une équation différentielle comme intégrée exactement (***) lorsque son intégration peut être ramenée à une suite d'opérations d'ordre *inférieur*, telles que des quadratures, des éliminations, des résolutions d'équations ordinaires (c'est-à-dire sans dérivées), des intégrales définies. On suppose effectuées toutes ces opérations accessoires, bien que leur exécution puisse être très difficile et quelquefois impraticable.

Liouville, au contraire, exigeait que toutes ces opérations fussent réellement exécutables, n'admettait de quadratures non

(*) « Résumer et coordonner les recherches qui ont été faites sur l'intégration des équations linéaires du second ordre, à deux variables, et compléter cette théorie, ou tout au moins la faire progresser, par des recherches originales. » *Bull. de l'Ac.*, 3e sér., t. V, janvier 1883, p. 16.

(**) Liouville, *Journal*, t. VI; Genocchi, *C. R. de l'Ac. des sc. de Paris*, t. LXXXV, p. 391.

(***) Par opposition à l'intégration *approximative*, au moyen des séries, ou de la substitution de différences finies aux différentielles.

Digitized by Google

effectuées que dans le résultat final et excluait les intégrales définies entre limites spéciales (*).

Il n'y a donc aucune contradiction entre sa théorie et la possibilité de ramener l'équation linéaire générale du second ordre au même point que les équations considérées, par tous les auteurs, comme intégrables.

Il faut reconnaître cependant que l'opinion générale n'est pas en faveur de la possibilité de cette réduction.

Les analystes les plus éminents s'en sont occupés, avec toutes les ressources de l'érudition et du génie, sans parvenir, à beaucoup près, à résoudre la question, du moins en ce qui concerne le cas général.

Dans ces conditions, peut-on espérer encore la réussite de recherches nouvelles dans le même ordre d'idées? Personne ne l'admettra, à moins d'en avoir sous les yeux la preuve irrécusable et complète; tant qu'il restera un seul point non éclairci, tout le monde se dira, non sans raison, que la difficulté est seulement déplacée.

Aussi n'est-ce pas sans hésitation qu'après l'insuccès du concours de 1885, je me suis décidé à proposer de nouveau à la Classe la même question pour le concours de 1887. L'avis favorable de mon savant confrère, M. Mansion, si compétent en ces matières, a contribué à former ma conviction.

En même temps, j'ai résolu de faire connaître, en quelque sorte comme complément de la question posée, les recherches que j'ai effectuées moi-même pour la résoudre, dans plusieurs directions différentes.

Telles qu'elles sont, ces Notes, considérées comme répondant au concours, constitueraient une réponse très imparfaite. Nulles au point de vue historique, elles ne complètent certainement pas la théorie des équations linéaires du second ordre, et il n'est pas même prouvé qu'elles la fassent réellement pro-

(*) On sait que l'équation de Riccati peut *toujours* s'intégrer au moyen d'intégrales définies. Voir, par exemple, ma Note sur cette équation (*Bull. de l'Ac.*, 3e sér., t. IX).

Digitized by Google

gresser. Ma seule ambition, en les publiant, est d'amener l'un des concurrents éventuels à faire mieux que moi, et à combler l'une des lacunes que je signale, au moyen d'une idée nouvelle qui m'échappe et qu'il pourrait découvrir (*).

Comme le dit Lacroix (**), « il est moins permis ici qu'ailleurs de négliger les procédés qui paraissent faire un double emploi, parce qu'il s'agit des dernières limites de la science, et qu'ignorant de quel côté viendront les progrès ultérieurs, il faut conserver tout ce qui tient à des idées nouvelles, ou peut en suggérer ».

Je diviserai ce Mémoire en six paragraphes, intitulés :

I. *Transformation fondamentale de l'équation linéaire du second ordre. — Théorèmes qui en résultent;*
II. *Produits des solutions des équations linéaires;*
III. *Équations simultanées du premier ordre;*
IV. *Transformations des équations du premier ordre;*
V. *Intégrales définies;*
VI. *Équations aux dérivées partielles.*

Je récapitulerai ensuite les résultats obtenus, sous la forme annoncée dans un travail antérieur, en ces termes (***) :

« J'ai été conduit, relativement à ce genre d'équations (les équations linéaires du second ordre), à un certain nombre de théorèmes que j'ai classés en deux groupes : les théorèmes de *réduction* et les théorèmes d'*équivalence*.

Voici un exemple de théorème de réduction..... On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait résoudre le problème suivant :

Étant donnée l'intégrale de l'équation

$$z'' - z'^2 + kF(x) = 0,$$

(*) Les mémoires en réponse à la question de concours doivent être adressés au secrétaire perpétuel de l'Académie avant le 1er août 1887.

(**) *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, par Lacroix; 2e éd., 1819, t. III, p. v.

(***) Note, déjà citée, sur l'équation de Riccati.

Digitized by Google

ou celle de

$$t'' - t'^2 + F(\varpi) + k = 0,$$

trouver l'intégrale de

$$t'' - t'^2 + F(x) = 0.$$

Dans ce problème, il faut supposer que la fonction $F(x)$ contienne k (si cette constante conserve la forme littérale), sans quoi il suffirait de faire $k=1$, ou $k=0$, dans l'intégrale, pour obtenir la solution. Le théorème de réduction dont il s'agit ici, et plusieurs autres, sont démontrés dans deux Notes contenues dans des plis cachetés acceptés par l'Académie (séances du 1er avril et du 5 août 1882) (*).

Voici maintenant un exemple de théorème d'équivalence.

Les trois équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yx^{-4}F(x^{-1})$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yD_x[\text{inv.}\int F(x)dx]$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables.

. . . . . A chaque énoncé d'un théorème de réduction correspond l'énoncé d'un théorème d'équivalence *à démontrer* et réciproquement.

Malheureusement, il paraît difficile d'obtenir deux théorèmes qui se correspondent ainsi et que l'on puisse démontrer.

J'ai cru utile, cependant, de réunir des théorèmes de réduction et des théorèmes d'équivalence, ou, ce qui revient au

(*) Le contenu de ces deux plis cachetés, et d'un troisième, déposé le 5 décembre 1885, est reproduit textuellement, comme Appendice au présent Mémoire.

Digitized by Google

même, de faire un tableau de formes F qui rendent l'équation

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x)\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

intégrable, et d'autres formes qui devraient jouir de cette propriété pour que l'on pût ensuite arriver à l'intégrale complète de (2), pour une forme quelconque de F.

Dans la première catégorie se trouveraient, d'après ce qui précède, les formes

$$x^{-4}\frac{\varphi''(x^{-1})}{\varphi(x^{-1})}$$

et

$$D_x\left[\text{inv.}\int\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}dx\right],\ (*)$$

et dans la seconde, les formes

$$k\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

et

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + k \ldots \text{»}.$$

Le moment est venu de développer ces idées, d'indiquer l'origine et la liaison des théorèmes obtenus, et de faire voir comment les méthodes en apparence les plus diverses ramènent toutes vers la même difficulté, peut-être insoluble.

(*) Voici quelques applications simples de ces deux formes :

1re. Soit	$\varphi(x) = e^x$,	on trouve x^{-4},
	$\varphi(x) = x^m$,	$m(m-1)x^{-2}$.
	$\varphi(x) = \text{l}.x$,	$\frac{x^{-2}}{\text{l}.x}$.
2de.	$\varphi(x) = x^m$,	$m(m-1)x^{-2}$.

Digitized by Google

§ Ier.

Transformation fondamentale de l'équation linéaire du second ordre. — Théorèmes qui en résultent.

On sait que toute équation linéaire du second ordre peut être ramenée à la forme

$$y'' = yF(x) + \varphi(x) \text{ (*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si l'on pose :

$$x = f(u). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$y = vf'^{\frac{1}{2}}(u) + g(u) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

f et g étant deux formes indéterminées, l'équation (1) devient, toutes réductions faites :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f'''\right] \text{ (**)} \\ + f'^{\frac{5}{2}}gF(f) + f'^{-\frac{5}{2}}f''g' - f'^{-\frac{1}{2}}g'' \\ + \varphi(f)f'^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

La première ligne correspond à l'équation la plus simple, où φ n'existe pas, et à la transformation également la plus simple, où g n'existerait pas non plus. La seconde ligne repré-

(*) On pourrait même faire abstraction du terme $\varphi(x)$, mais il est utile de le conserver.

(**) La quantité entre crochets peut s'écrire aussi :

$$F(f)f'^2 + \frac{D_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}.$$

Digitized by Google

sente la partie qui dépend essentiellement de g, et la troisième, la partie qui dépend essentiellement de φ.

La résolution de l'équation (4) entraîne celle de l'équation (1), car il suffira, pour obtenir la relation entre y et x, d'éliminer u et v entre (2), (3), et l'intégrale de (4).

Réciproquement, si l'on sait intégrer (1), l'intégrale de (4) s'obtiendra en éliminant x et y entre (2), (3), et l'intégrale de (1).

Je vais exposer successivement trois théorèmes fondamentaux résultant de cette transformation, puis résumer les essais infructueux que j'ai tentés pour tirer de la formule (4) une solution générale du problème.

THÉORÈME I. — On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait déduire l'intégrale de l'équation

$$y^{-1}y'' = X$$

de l'intégrale, supposée connue, de cette autre équation :

$$y^{-1}y'' = kX.$$

(X est une fonction quelconque de la variable indépendante x, k une constante déterminée; c'est-à-dire qu'il faut savoir résoudre le problème pour toutes les formes possibles de X, mais qu'il suffit de savoir le résoudre pour une seule valeur déterminée de k, autre que 0 ou 1.

Si k conserve sa forme littérale, on doit supposer que la fonction quelconque X contienne la lettre k, sans quoi il suffirait, pour résoudre le problème, de faire $k = 1$.)

Démonstration. — Nous avons vu qu'une équation linéaire du second ordre,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x),$$

se ramène, au moyen de :

$$x = f(u), \quad y = vf'^{\frac{1}{2}}(u),$$

Digitized by Google

à la forme

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f'''\right].$$

En posant : $\varepsilon(u) = f'^{-\frac{k}{2}}$, on trouve :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 - \frac{1}{4}(k-1)f'^{-2}f''^2 + k^{-1}\varepsilon^{-1}\frac{d^2\varepsilon}{du^2}\right].$$

f étant encore arbitraire, déterminons-le par l'équation :

$$F(f)f'^2 = \frac{1}{4}(k-1)f'^{-2}f''^2,$$

$$\sqrt{F(f)}f' = \frac{1}{2}\sqrt{k-1}\,f'^{-1}f''.$$

Cette équation s'intègre par deux quadratures; et la résultante, ne contenant que f et f', mais non la variable indépendante u, est encore intégrable. On connaîtra donc la valeur de f, et par conséquent celle de ε, en u.

L'équation restant à résoudre sera :

$$\frac{d^2v}{du^2} = vk^{-1}\varepsilon^{-1}\frac{d^2\varepsilon}{du^2}.$$

Or, si on avait simplement :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\varepsilon^{-1}\frac{d^2\varepsilon}{du^2},$$

on intégrerait complètement, par l'intermédiaire de la solution particulière $v = \varepsilon$.

L'intégration est donc bien ramenée à la question que j'ai supposée résolue dans l'énoncé de ce Théorème I.

On ne peut pas, d'ailleurs, supposer $k = 0$ ou $k = 1$, car alors les calculs précédents deviendraient illusoires.

Digitized by Google

THÉORÈME II. — On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait déduire l'intégrale de l'équation

$$y^{-1}y'' = X$$

des deux intégrales, supposées connues, de ces autres équations :

$$y^{-1}y'' = X + U,$$
$$y^{-1}y'' = X + kU.$$

(X est une fonction quelconque de la variable indépendante x, U une fonction déterminée de la même variable, k une constante déterminée; c'est-à-dire qu'il faut savoir résoudre le problème pour toutes les formes possibles de X, mais qu'il suffit de savoir le résoudre pour une seule forme déterminée de la fonction U, même une constante différente de zéro; et aussi pour une seule valeur déterminée de k, autre que 0 ou 1.

Si k ou U (supposée constante), ou les deux constantes k et U, conservent leur forme littérale, on doit admettre que la fonction quelconque X contienne ces constantes; sans quoi, il suffirait, pour résoudre le problème, de faire $k = 0$ ou $U = 0$.)

Démonstration. — Il suffit de prouver que, moyennant la propriété indiquée dans l'énoncé, on saura aussi passer de l'intégrale de

$$t^{-1}t'' = (1 - k)Z$$

(où Z représente une fonction donnée de la variable indépendante z et t une fonction inconnue de cette même variable) à l'intégrale de

$$t^{-1}t'' = Z,$$

car, alors, on pourra invoquer le Théorème I.

Supposons donnée l'intégrale de

$$t^{-1}t'' = (1 - k)Z,$$

et transformons cette équation en posant

$$z = f(u),$$
$$t = vf'^{\frac{1}{2}}(u),$$

Digitized by Google

d'où :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[(1-k)f'^2\mathrm{Z}(f) + \frac{\mathrm{D}_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Déterminons la fonction f, au moyen de la fonction donnée et invariable U, par l'équation

$$-f'^2\mathrm{Z}(f) = \mathrm{U}(u),$$

équation facile à intégrer ; puis choisissons la fonction arbitraire X de manière que

$$\mathrm{X}(u) + \mathrm{U}(u) = \frac{\mathrm{D}_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}.$$

Pour cette forme de X, l'équation

$$y^{-\frac{1}{4}}y'' = \mathrm{X} + \mathrm{U}$$

est évidemment intégrable.

L'équation

$$y^{-\frac{1}{4}}y'' = \mathrm{X} + k\mathrm{U}$$

l'est aussi, parce qu'elle coïncide avec l'équation (5).

Donc, en vertu des données de la question, l'équation

$$y^{-\frac{1}{4}}y'' = \mathrm{X}$$

ou

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[f'^2\mathrm{Z}(f) + \frac{\mathrm{D}_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

sera aussi intégrable.

Or, c'est précisément celle à laquelle on serait arrivé en partant de

$$t^{-\frac{1}{4}}t'' = \mathrm{Z}$$

et en opérant la même transformation que ci-dessus.

Digitized by Google

Donc l'intégration de

$$t^{-1}t'' = (1-k)Z$$

entraînerait celle de

$$t^{-1}t'' = Z,$$

et toutes les équations linéaires du second ordre deviendraient intégrables, en vertu du théorème I.

THÉORÈME III. — On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait déduire l'intégrale de l'équation

$$y^{-1}y'' = X$$

d'une seule intégrale particulière (supposée connue) de cette autre équation :

$$y^{-1}y'' = X + y^{-1}U.$$

(X est une fonction quelconque de la variable indépendante x, U est une fonction déterminée de la même variable; c'est-à-dire qu'il faut savoir résoudre le problème pour toutes les formes possibles de X, mais qu'il suffit de le résoudre pour une seule forme déterminée de U, même une constante, autre que zéro.

Si U, supposée constante, conserve sa forme littérale, on doit admettre que la fonction quelconque X contienne la lettre U, sans quoi il suffirait, pour résoudre le problème, de faire $U = 0$.)

Démonstration. — Soit à intégrer l'équation quelconque

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x).$$

Substituons à y une fonction quelconque de x; l'équation ne se vérifiera pas, mais nous obtiendrons, pour cette valeur y_1 :

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = y_1F(x) + P(x).$$

Nous connaîtrons donc *une* solution de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x) + P(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Digitized by Google

Transformons cette dernière équation, en posant

$$x = f(u),$$

$$y = vf'^{\frac{1}{2}}(u).$$

On aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f'''\right] \\ + f'^{\frac{5}{2}}\varphi(f).\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

La fonction f est encore arbitraire. Déterminons-la par l'équation

$$f'^{\frac{5}{2}}\varphi(f) = U(u),$$

$$\varphi^{\frac{2}{5}}(f)f' = U^{\frac{2}{5}}(u).$$

Cette équation s'intègre par deux quadratures, et on obtient ensuite la forme de f, en u, par la résolution d'une équation ne contenant plus de dérivées. Pour cette valeur de f, l'équation devient :

$$v^{-1}\frac{d^2v}{du^2} = F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f''' + v^{-1}U(u);$$

et on en connaît une solution, par l'intermédiaire de l'intégrale particulière donnée des équations (6) et (7).

Donc, d'après l'énoncé du théorème, on saura intégrer

$$v^{-1}\frac{d^2v}{du^2} = F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f''.$$

Or, celle-ci est précisément la transformée de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x),$$

à laquelle on ferait subir les mêmes opérations, avec la même valeur de f. Le théorème est donc démontré.

Digitized by Google

RÉFLEXIONS DIVERSES SUR LA FORMULE (4) ET SUR LES TROIS THÉORÈMES QU'ON EN DÉDUIT.

a. L'un des cas les plus remarquables du théorème I est celui où l'on supposerait $k = -1$, c'est-à-dire qu'il faudrait savoir passer de l'intégrale de

$$y^{-1}y'' = F(x)$$

à celle de

$$y^{-1}y'' = -F(x).$$

Cela ne peut pas se faire, en général, mais bien dans un grand nombre de cas particuliers, et chaque fois qu'on les rencontrera dans l'application de la méthode, l'intégration pourra s'achever.

Voici quelques-uns de ces cas :

1° Si $F(x)$ est une fonction impaire, alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x)$$

se change en

$$\frac{d^2y}{du^2} = -yF(u),$$

en posant $x = -u$.

2° Si $F(x)$ est une fonction doublement paire, c'est-à-dire qui reste invariable quand on y remplace x par $\pm x\sqrt{-1}$, alors

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x)$$

se change en

$$\frac{d^2y}{du^2} = -yF(u),$$

par $x = \pm u\sqrt{-1}$.

Digitized by Google

3° Si $F(x)$ est l'inverse d'une fonction paire $p(x)$, par rapport à une fonction impaire quelconque $i(x)$, c'est-à-dire si l'on a :

$$F(p) = i.$$

En effet, appliquant alors la transformation fondamentale, et remplaçant f par p, l'intégration de

$$y'' = yF(x)$$

dépendra de celle de l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(p)p'^2 + \frac{3}{4}p'^{-2}p''^2 - \frac{1}{2}p'^{-1}p'''\right]$$
$$= v\left[i(u)p'^2 + \frac{3}{4}p'^{-2}p''^2 - \frac{1}{2}p'^{-1}p'''\right].$$

Si, dans cette transformation, nous remplaçons u par $-s$, l'équation à résoudre deviendra :

$$\frac{d^2v}{ds^2} = v\left[-i(s)p'^2 + \frac{3}{4}p'^{-2}p''^2 - \frac{1}{2}p'^{-1}p'''\right] \quad \ldots \quad (8),$$

parce que tous les termes compris dans la parenthèse, abstraction faite de $-i(s)$, constituent des fonctions paires. Or l'équation (8) est précisément celle à laquelle on serait arrivé en partant de

$$y'' = -yF(x),$$

et en posant :

$$x = f(s),$$
$$y = vf'^{\frac{1}{2}}(s).$$

Le théorème est donc démontré.

Examinons de plus près les cas dans lesquels la transformation réussira par l'intermédiaire du théorème I.

Digitized by Google

L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x)$$

se ramène à

$$\frac{d^2v}{du^2} = -v\frac{\frac{d^2\varepsilon}{du^2}}{\varepsilon}$$

(je fais $k=-1$ dans le théorème I),

et cette dernière est intégrable si $\frac{\frac{d^2\varepsilon}{du^2}}{\varepsilon}$ est une fonction impaire, ou doublement paire, ou inverse d'une fonction paire.

Or, $\varepsilon(u) = f'^{\frac{1}{2}}$, et f' est déterminé par

$$\sqrt{F(f)}f' = \frac{1}{2}\sqrt{-2}\, f'^{-1}f''.$$

En appelant $G(x)$ l'intégrale de $\sqrt{F(x)}dx$, on aura donc :

$$G(f) = \frac{1}{2}\sqrt{-2}\, l.f',$$

$$e^{G(f)\sqrt{-2}}f' = 1.$$

Posons encore :

$$\int e^{G(x)\sqrt{-2}}dx = H(x);$$

on aura :

$$H(f) = x, \quad f = H_1(x),$$

en représentant par H_1 la fonction inverse de H. On pourra donc vérifier si $\frac{D^2\left(f'^{\frac{1}{2}}\right)}{f'^{\frac{1}{2}}}$ remplit les conditions voulues.

Réciproquement, si l'on connaît une fonction de la forme $\frac{z''}{z}$, qui soit impaire, ou doublement paire, ou inverse d'une fonction paire (ou, plus généralement, telle que la fonction

Digitized by Google

$-\frac{z''}{z}$ soit aussi intégrable) (*), on en déduira une autre fonction intégrable, laquelle s'exprimera comme il suit :

$$f'^{\frac{1}{2}} = z, \quad f' = z^2, \quad f = \int z^2 dx, \quad H = \text{inv.} \int z^2 dx.$$

$$e^{\sqrt{-2}G(x)} = D_x \text{inv.} \int z^2 dx,$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{-2}} l. D_x \text{inv.} \int z^2 dx.$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\left[\frac{D_x^2 \text{inv.} \int z^2 dx}{D_x \text{inv.} \int z^2 dx}\right]^2.$$

Application. — On connaît deux fonctions simples, directement intégrables, qui sont doublement paires, savoir C et Cx^{-4}; mais, à cause de la difficulté des inversions, on ne peut guère en déduire que la forme intégrable Cx^{-2}, déjà connue et qui se retrouve par tant de moyens.

b. *Théorème d'équivalence.* — Reprenons la transformation fondamentale et considérons d'abord la première ligne seule, ce qui revient à supposer $\varphi = 0$ et $g = 0$. On voit qu'il faudrait faire en sorte que

$$F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f''' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

fût égale à une fonction $F_1(u)$ qui permît d'intégrer

$$v'' = vF_1(u).$$

Il paraît impossible de déterminer *f a priori* de manière que cela arrive. Mais on peut cependant déduire de cette remarque des propriétés assez curieuses.

(*) A partir d'ici, il m'arrivera souvent de dire, par abréviation, qu'une fonction $\varphi(x)$ est intégrable, pour exprimer que l'équation

$$y'' = y\varphi(x)$$

jouit de cette propriété.

Digitized by Google

Si l'on a :

$$F(f'f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f''' = F_1(u),$$

les deux fonctions F et F_1 sont simultanément intégrables ou non intégrables, et cela quel que soit f.

L'application la plus remarquable, je pense, s'obtient en faisant

$$f = \frac{au + b}{cu + d},$$

ce qui annule la somme des deux derniers termes du premier membre. On trouve alors :

$$F_1(u) = \frac{(ad - bc)^2}{(cu + d)^4} F\left(\frac{au + b}{cu + d}\right),$$

c'est-à-dire que les deux fonctions $F(u)$ et

$$\frac{(ad - bc)^2}{(cu + d)^4} F\left(\frac{au + b}{cu + d}\right)$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables.

Mais cette dernière expression se ramène, par des transformations tout à fait élémentaires, soit à $F(u)$, soit à $u^{-4}F(u^{-1})$. On retombe donc sur un théorème que j'ai trouvé ailleurs par un autre procédé (*).

Essayons encore $f = \alpha e^{\beta u}$. On trouve

$$F_1(u) = \alpha^2\beta^2 e^{2\beta u} F(\alpha e^{\beta u}) + \frac{1}{4}\beta^2.$$

Ainsi, les mêmes méthodes, qui donnent l'intégrale de l'équation de Riccati :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^m y,$$

donnent en même temps celle de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[x^{m+2}\beta^2 c^{(m+2)\beta x} + \frac{1}{4}\beta^2\right]y \quad \ldots\ldots \quad (10,$$

(*) Note, déjà citée, sur l'équation de Riccati.

Digitized by Google

En faisant $m = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, on voit que x^{-4} et $e^x + \frac{1}{4}$ sont simultanément intégrables ou non intégrables ; de même x^{-9} et $\frac{5}{4}$ sont simultanément intégrables ; enfin, x^{-4} étant intégrable, $e^{-2x} + \frac{1}{4}$ l'est aussi. En faisant $m = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, on voit que $e^x + \frac{1}{16}$ est intégrable (*).

c. Si l'on sait intégrer les fonctions F et F_1, on sait aussi intégrer les équations

$$F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f''' = F_1(u),$$

$$F_1(h)h'^2 + \frac{3}{4}h'^{-2}h''^2 - \frac{1}{2}h'^{-1}h''' = F(u),$$

respectivement par rapport à f et par rapport à h.

Le cas étant évidemment le même pour les deux équations, bornons-nous à examiner la première, et cherchons à intégrer l'équation

$$y'' = yF(x),$$

en posant

$$x = f(u),$$

$$y = vf'^{\frac{1}{2}}(u);$$

on trouvera :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f'''\right] = vF_1(u),$$

d'où :

$$v = \Theta(u).$$

D'autre part, la forme F étant aussi intégrable, on aura :

$$y = \Theta_1(x);$$

(*) Il s'agit ici de l'intégration sans intégrales définies entre limites spéciales. En employant de pareilles intégrales, l'équation (10) est toujours intégrable, quels que soient α, β et m, puisqu'elle se ramène à l'équation de Riccati.

Digitized by Google

d'où :

$$\Theta_1[f(u)] = \Theta(u) f'^{\frac{1}{2}}(u),$$

$$\Theta_1[f(u)] f'^{-\frac{1}{2}}(u) = \Theta(u),$$

$$\Theta_1^{-2}[f(u)] f'(u) du = \Theta^{-2}(u) du.$$

L'intégration s'achève maintenant par deux quadratures et une résolution d'équation.

Application. — Faisons $F(f) = c$, en laissant $F_1(u)$ indéterminé (mais intégrable). On saura donc intégrer l'équation

$$\frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}} + c\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4} = F_1(u) \ (^*).$$

d. *Théorèmes généraux de réduction et théorème d'équivalence remarquable.* — N'ayant pas réussi à déterminer, dans l'expression (9), une forme f qui rende l'intégration possible, je me suis posé le problème inverse.

Déterminer la forme F de manière que l'on puisse ensuite, pour une certaine forme de f, trouver celle de v. On a :

$$F(f) f'^2 = -\frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}} + \frac{v''}{v}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

et maintenant f et v sont tous deux arbitraires. En les choisis-

(*) En d'autres termes, les équations

$$y^{-\frac{1}{4}} y'' = F_1(x)$$

et

$$y^{-\frac{1}{4}} y'' + c y^{-4} = F_1(x)$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables. Nous retrouverons ultérieurement ce théorème, sous une forme encore plus précise.

Digitized by Google

sant au hasard, on pourra ensuite déterminer une forme F qui sera certainement intégrable.

L'équation (11) est toutefois trop compliquée pour que l'on puisse trouver les valeurs de f et de v qui donneront pour F des valeurs remarquables. Nous allons donc la transformer.

Le procédé qui se présente tout naturellement consiste à égaler le second membre à une fraction ayant pour dénominateur le produit $vf'^{-\frac{1}{2}}$, puisqu'alors le numérateur se trouve égal à une différentielle exacte.

Posons donc :

$$\frac{v''}{v} - \frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}} = \frac{t'}{vf'^{-\frac{1}{2}}}.$$

On trouve aisément :

$$v = f'^{-\frac{1}{2}} \int f' t du$$

et

$$F(f) = \frac{t'}{f' \int f' t du} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

f et t sont encore arbitraires, et maintenant la formule semble plus maniable (*). Faisons-en quelques applications :

Si l'on pose $\int f' t du = z$, et $\int F(x) dx = F_1(x)$, il vient :

$$F_1\left(\int \frac{z'}{t} du\right) = \int \frac{t'}{z} du.$$

z et t sont toujours arbitraires, mais maintenant c'est la fonction dérivée de F_1 qui est intégrable.

En résolvant cette équation par rapport à

$$\int \frac{z'}{t} du,$$

(*) Elle devient, d'ailleurs, évidente *a priori*, si l'on y remplace t par $\varphi' f$).

Digitized by Google

on peut écrire :

$$F_2\left(\int \frac{t'}{z}du\right) = \int \frac{z'}{t}du.$$

F_1 et F_2 sont évidemment deux fonctions inverses l'une de l'autre, tandis que F_1' et F_2' sont deux fonctions intégrables.

Si donc l'on me donne une fonction intégrable F_2', je pourrai calculer z et t de manière que

$$F_2\left(\int \frac{t'}{z}du\right) = \int \frac{z'}{t}du;$$

car en posant, par exemple, $z = t'$, d'où $z' = t''$, il vient :

$$F_2(u) = \int \frac{t''}{t}du,$$

d'où

$$\frac{t''}{t} = F_2'(u),$$

équation intégrable, par hypothèse. z et t sont donc connus, et les fonctions F_2' et F_1' (dérivées de F_2 et F_1, inverses l'une de l'autre) sont toutes deux intégrables.

En d'autres termes, si l'on part d'une fonction intégrable F_2', et qu'on lui fasse subir trois opérations successives : l'intégration, qui donne F_2; l'inversion, qui donne F_1; la différentiation, qui donne F_1', on retrouve une fonction intégrable. C'est la reproduction du théorème déjà démontré dans mes études précédentes (*). Comme je le disais alors, il ne paraît pas facile de trouver un troisième théorème d'équivalence, aussi simple que les deux théorèmes que nous venons de reproduire et qui se résument dans les expressions

$$x^{-4}F(x^{-1}) \quad \text{et} \quad D_x\left[\text{inv.}\int F(x)dx\right].$$

(*) Note sur l'équation de Riccati. On a vu aussi, dans cette Note, que l'inversion peut s'entendre de deux manières différentes, sans que le théorème d'équivalence cesse d'être exact.

Digitized by Google

En partant de x^{-1}, on trouve e^x. En rapprochant cette remarque de celle de la page 21, on voit que e^x et $e^x + \frac{1}{4}$ sont simultanément intégrables ou non intégrables. $e^x + c$ ne paraît être intégrable, sans intégrales définies, que quand $c = \frac{\alpha^2}{16}$, α étant un nombre impair. Voir, à ce sujet, l'observation ci-après.

Si, dans l'expression

$$F(f) = \frac{t'}{f' \int f' t du},$$

on pose :

$$t' = \int f' t du,$$

il reste :

$$F(f) = \frac{1}{f'};$$

mais t est donné alors par :

$$t'' = f' t,$$

d'où

$$\frac{t''}{t} = f'.$$

La conclusion est que quand f' est intégrable, la forme F donnée par $F(f) = \frac{1}{f'}$ l'est aussi.

L'expression

$$F(f) f'^{\frac{3}{2}} + \frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}},$$

qui est également intégrable, se réduit alors à

$$f' + \frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}};$$

Digitized by Google

donc les deux formes

$$f' \quad \text{et} \quad f' + \frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}$$

sont toujours simultanément intégrables ou non intégrables. En faisant $f' = e^z$, on retrouve la propriété que nous avons déjà remarquée.

Reprenons l'équation

$$F(f) = \frac{t'}{f' \int f' t du},$$

ou

$$F(f) f'^2 = \frac{f' t'}{\int f' t du}.$$

Puisque la forme F, déterminée par cette équation, est toujours intégrable, on voit, par l'équation (4), que l'on sait aussi toujours intégrer

$$\frac{f' t'}{\int f' t du} + \frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}.$$

Posant $f' t = s'$, cette expression devient

$$\frac{s' t'}{st} + \frac{D^2\left[\left(\frac{s'}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left(\frac{s'}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}},$$

ou, à cause de la symétrie :

$$\frac{s' t'}{st} + \frac{D^2\left[\left(\frac{t'}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left(\frac{t'}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

On peut aussi, dans (12), poser :

$$f = \frac{\theta'^2}{2}, \quad t = \frac{1}{\theta'},$$

Digitized by Google

et l'on obtient alors cette formule assez curieuse :

$$F\left(\frac{\Theta'^2}{2}\right) = -\frac{\Theta'''}{\Theta\Theta'\Theta''^3}.$$

Dans toutes les expressions intégrables qui précèdent, il n'entre que deux fonctions arbitraires. Il est très facile d'en introduire une troisième.

En reprenant, en effet, la transformation fondamentale avec une forme quelconque de g, et en raisonnant comme on l'a fait pour trouver l'équation (12), on voit que la forme F sera :

$$F(f) = \frac{t' + D(f'^{-1}g')}{f'\left(g + \int f' t du\right)},$$

ce qui se réduit à l'équation (12) lorsque $g = 0$.

Si, comme application, nous posons :

$$f = u^m, \quad t = \alpha u^n, \quad g = \beta u^p,$$

nous trouverons, comme forme intégrable :

$$\frac{n\alpha u^{\frac{n-1}{m}} + \frac{\beta p}{m}(p-m)u^{\frac{p-m-1}{m}}}{m\beta u^{\frac{p+m-1}{m}} + \frac{\alpha m^2}{m+n}u^{\frac{2m+n-1}{m}}}$$

où α, β, m, n, p sont des constantes arbitraires.

En voulant simplifier davantage, on retombe sur des formes connues; notamment, l'hypothèse $p = m + n$ conduit à γu^{-2}.

e. La formule (4) montre bien comment on peut passer de l'intégrale, supposée connue, de

$$y'' = yF(x),$$

Digitized by Google

à celle de :

$$y'' = yF(x) + \varphi(x).$$

En effet, puisque l'on sait intégrer F, on sait aussi (e) déterminer f de manière que

$$F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f''' = 0,$$

et alors on voit que l'équation (4) s'intègre par une double quadrature. On peut même effectuer les opérations d'une infinité de manières, puisque g reste arbitraire.

Mais le problème inverse, c'est-à-dire passer, d'une intégrale particulière de

$$y'' = yF(x) + \varphi(x),$$

à l'intégrale de

$$y'' = yF(x),$$

reste inabordable. Il résulte seulement du théorème III qu'il suffirait de savoir le résoudre pour une seule forme φ déterminée, F restant quelconque.

L'essai le plus naturel à tenter consisterait à déterminer f et g de manière à annuler l'ensemble des deuxième et troisième lignes de la formule (4).

Alors la connaissance d'une intégrale de (1) donnerait une intégrale de (4); cette dernière équation, n'ayant plus que deux termes, serait donc complètement intégrée, et comme elle est la résultante de

$$y'' = yF(x),$$

moyennant les hypothèses

$$x = f(u), \quad y = \eta f'^{\frac{1}{2}}(u),$$

le problème serait résolu.

Mais on ne parvient pas à déterminer f et g de manière à remplir la condition voulue. Si, par exemple, on prend g pour

Digitized by Google

inconnue dans l'équation obtenue en égalant à zéro la somme des deux dernières lignes, on est amené, en posant :

$$gf'^{-\frac{1}{2}} = z,$$

à résoudre l'équation :

$$\frac{z''}{z} = \mathrm{F}(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f''',$$

c'est-à-dire que l'on tourne dans un cercle vicieux. Tout ce que l'on peut faire, en dehors de ce qui a déjà été exposé, est de donner des valeurs particulières à f, à g et à v, et d'exprimer ensuite l'une des fonctions F et φ au moyen de l'autre.

f. On a vu, par les transformations précédentes, que l'intégration de $\mathrm{F}(x)$ se ramène à celle de

$$\mathrm{F}(f)f'^2 + \frac{\mathrm{D}^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}},$$

f étant arbitraire.

Si donc on pouvait déterminer f de manière à identifier cette expression avec une autre reconnue intégrable, on en déduirait l'intégration de $\mathrm{F}(x)$.

Supposons, par exemple, que l'expression

$$\frac{\mathrm{D}^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}} + \varphi(f, f', f'', \ldots)$$

soit intégrable. Il restera à déterminer f par l'équation

$$\mathrm{F}(f)f'^2 = \varphi(f, f', f'' \ldots)$$

et si cette dernière est elle-même intégrable, le problème sera résolu.

Digitized by Google

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que si les deux équations *linéaires du second ordre*

$$y'' = yF(x), \quad \ldots \quad (13)$$

$$z'' = z\left[\frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}} + \varphi(f, f', f'', \ldots)\right] \quad \ldots \quad (14)$$

sont intégrables, l'équation *non linéaire et d'ordre quelconque*

$$F(f)f'^2 = \varphi(f, f', f'', \ldots) \quad \ldots \quad (15)$$

sera elle-même intégrable. Mais il faut que, dans la seconde de ces équations, z puisse s'obtenir en f et en f', la fonction f restant indéterminée.

En effet, on aura alors, en posant

$$y = \psi(x), \quad x = f(u), \quad y = zf'^{\frac{1}{2}}(u) :$$
$$z = \Theta f, f')$$

et l'élimination de x, de y et de z entre ces quatre dernières équations donnera une résultante intégrable entre f et f'.

Plus généralement encore, si deux des trois équations (13), (14) et (15) sont intégrables, la troisième l'est aussi.

En nous bornant au théorème direct, voici quelques-unes des formes de φ qui rendent l'intégration de (15) immédiate :

$$\varphi_1(f, f')\,(*),$$
$$\varphi_2(f)\varphi_3(f')f'',$$
$$F(f)\varphi_4(f', f''),$$
$$\varphi_5(f)f'f''',$$
$$\varphi_6(f)f''^2,$$
$$\varphi_7(f)\varphi_8(f')f''^2.$$

5. Considérons la forme

$$\alpha x^{-2} + \beta,$$

où β n'est pas nul. Cette forme, d'après le théorème de Liou-

(*) Pourvu que f' ne disparaisse pas dans l'équation.

Digitized by Google

ville, ne peut s'intégrer que si $\alpha = \gamma(\gamma + 1)$, γ étant un nombre entier.

Appliquons-lui la transformation fondamentale, avec

$$g = 0, \quad \text{et} \quad f = \frac{2}{\sqrt{\beta}} e^{\frac{u}{2}}.$$

La transformée sera :

$$\frac{d^2v}{du^2} = e^u + \frac{1}{16} + \frac{\alpha}{4}.$$

Cette dernière équation ne pourra donc s'intégrer, dans le sens du théorème de Liouville, que si

$$\alpha = \gamma(\gamma + 1);$$

elle devient alors :

$$\frac{d^2v}{du^2} = e^u + \frac{(2\gamma + 1)^2}{16} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Ainsi l'équation (16) elle-même n'est intégrable, dans ce sens, que pour γ entier. En faisant $\gamma = 0$, on retrouve la forme connue $e^u + \frac{1}{16}$ (page 21).

Digitized by Google

§ II.

Emploi des produits des intégrales particulières.

L'équation différentielle, qui a pour intégrales tous les produits m à m des intégrales particulières d'une équation linéaire du second ordre, est elle-même linéaire, parce que la somme de deux produits analogues est aussi un produit de même espèce; de plus, cette équation est de l'ordre $m + 1$, parce que son intégrale doit renfermer $m + 1$ constantes arbitraires. Pour la trouver, on écrira la valeur du produit P_m en fonction de deux solutions y_1 et y_2, et de $m - 2$ constantes; on formera les $m + 1$ premières dérivées de P_m; on multipliera P_m, P'_m, ... $P_m^{(m+1)}$ respectivement par $1, q_1, \ldots q_{m+1}$; on additionnera ces produits entre eux et l'on déterminera les $m + 1$ fonctions $q_1, \ldots, q_{m+1}$ de manière que la somme s'annule identiquement.

On trouve ainsi, sans aucune difficulté, l'équation linéaire ayant pour solutions les produits deux à deux des intégrales de

$$y'' + qy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Cette équation est la suivante :

$$P_2 + 2qq'^{-1}P_2' + \frac{1}{2}q'^{-1}P_2''' = 0,$$

ou :

$$P_2''' + 4qP'_2 + 2q'P_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

déjà obtenue et étudiée par Liouville (*).

(*) Plusieurs des résultats cités dans ce paragraphe rentrent dans ceux auxquels divers géomètres sont parvenus, généralement sous une forme différente.

Digitized by Google

Elle a pour intégrale (première) générale :

$$P_2'^2 - 2P_2P_2'' - 4P_2^2q = c^2;$$

et, en faisant $P_2 = u^2$, cette dernière équation se change en :

$$u'' + qu + \frac{c^2}{4}u^{-3} = 0.$$

Ainsi, l'adjonction du terme complémentaire $\frac{c^2}{4}u^{-3}$ transforme l'équation (17) en une autre, qui a pour intégrales toutes les moyennes proportionnelles entre deux intégrales particulières (égales ou inégales) de la première. L'hypothèse $c = 0$ correspond évidemment au cas de l'égalité ou de la simple multiplication par une constante (*).

Lorsque m est égal à 2, comme nous venons de le supposer, ou à une puissance de 2, on peut arriver d'une autre manière à l'équation différentielle dont P_m est une solution.

A cet effet, on part de l'équation (17), où l'on remplace y par P_2y^{-1}; on élimine ensuite y et ses dérivées entre l'équation ainsi obtenue, l'équation (17) et leurs dérivées en nombre convenable.

Ayant trouvé le résultat pour $m = 2$ et voulant passer à $m = 4$, on remplacerait P_2 par $P_4P_2^{-1}$, puis l'on opérerait comme précédemment.

Ce dernier calcul est déjà assez pénible, mais celui qui donne l'équation (18) est assez simple, et il a l'avantage de conduire, en passant, à la valeur de y, en fonction de P_2 et de ses dérivées. En effet, on trouve immédiatement :

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{P_2'}{P_2}\frac{y'}{y} + \frac{P_2''}{2P_2} + q = 0,$$

d'où :

$$y = \alpha e^{\int \frac{P_2' + \sqrt{P_2'^2 - 2P_2P_2'' - 4P_2^2q}}{2P_2}dx} + \beta e^{\int \frac{P_2' - \sqrt{P_2'^2 - 2P_2P_2'' - 4P_2^2q}}{2P_2}dx}.$$

(*) Ce résultat est analogue à celui qui a été obtenu à la page 20; il est seulement plus complet.

Digitized by Google

Reprenons, sous une forme un peu plus générale, cette dernière question, en quelque sorte réciproque de celle qui avait été posée d'abord.

Nous savons former les équations linéaires qui ont pour solutions les produits m à m des solutions d'une autre équation linéaire; il en résulte que si l'on savait intégrer l'équation linéaire primitive, on intégrerait aussi les équations linéaires plus complexes formées au moyen des produits.

Mais la réciproque est vraie; c'est-à-dire que si l'on connaissait les produits (ou même un seul produit) de m intégrales particulières de l'équation linéaire primitive du second ordre; ou, en d'autres termes, si l'on connaissait les intégrales (ou même une seule intégrale) de l'équation linéaire complexe, de l'ordre $m + 1$, on saurait intégrer complètement les deux équations linéaires.

Soit, en effet, $F = y_1 y_2 \dots y_m$ le produit de m solutions d'une équation linéaire

$$y'' + py' + qy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} y_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2, \\ &\vdots \\ y_m &= \alpha_m y_1 + \beta_m y_2, \end{aligned}$$

on peut écrire :

$$F = y_1 y_2 (\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2) \dots (\alpha_m y_1 + \beta_m y_2),$$

ou :

$$y_1^{-m} = F^{-1} \frac{y_2}{y_1} \left(\alpha_2 + \beta_2 \frac{y_2}{y_1}\right) \dots \left(\alpha_m + \beta_m \frac{y_2}{y_1}\right) = F^{-1} Y. \quad . \quad . \quad (20)$$

Mais on a, d'autre part :

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = c e^{-\int p dx},$$

Digitized by Google

ou :

$$D_x\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = cy_1^{-2}e^{-\int p dx},$$

$$D_x\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = ce^{-\int p dx}F^{-\frac{2}{m}}Y^{\frac{2}{m}},$$

ou, en séparant les variables :

$$Y^{-\frac{2}{m}}d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = cF^{-\frac{2}{m}}e^{-\int p dx}dx. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Cette équation s'intègre par deux quadratures et conduit ainsi à la valeur de $\frac{y_2}{y_1}$, en x.

Comme on aurait pu prendre aussi bien $\frac{y_3}{y_1}$, ..., on connaîtra toutes les solutions en fonction d'une seule, au moyen de la même formule (21), où les constantes seules changeront.

La connaissance du produit F permettra donc de déterminer toutes les intégrales particulières.

On voit que les constantes α_3, $\beta_3 \ldots \alpha_m$, β_m, c, jouent un grand rôle dans ce calcul. Nous allons étudier ce rôle de plus près, en nous bornant toutefois aux cas simples de $m = 2$ et de $m = 4$, dont le premier correspond, comme on le voit par les équations (20) et (21), aux intégrales des différentielles rationnelles et le second aux intégrales elliptiques.

Soient y_1 et y_2 deux intégrales particulières de l'équation

$$y'' + py' + qy = 0;$$

on aura :

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0,$$
$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0,$$

d'où :

$$\frac{y_1''}{y_1} - \frac{y_2''}{y_2} + p\left(\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2}\right) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Digitized by Google

On vérifie aisément que l'équation (22) a pour intégrale (première) générale :

$$\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2} = ce^{-\int p dx} y_1^{-1} y_2^{-1}, \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

où c est une constante arbitraire.

Si donc on connaît le produit $y_1 y_2 = F$, on pourra continuer l'intégration, et l'on trouvera :

$$\frac{y_1}{y_2} = c' e^{c\int F^{-1} e^{-\int p dx} dx},$$

d'où :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= c'^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} c\int F^{-1} e^{-\int p dx} dx} \\ y_2 &= c'^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} c\int F^{-1} e^{-\int p dx} dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Dans ces dernières expressions, la constante c' est seule arbitraire, tandis que c est déterminée en fonction de F et de q par la relation

$$c^2 e^{-2\int p dx} = F'^2 - 2FF'' - 2FF'p - 4F^2 q, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

comme on le voit en substituant l'une ou l'autre des valeurs (24) dans l'équation proposée.

Ces résultats coïncident avec ceux de la page 33, si l'on fait $p = 0$. Je ne les présente pas comme entièrement nouveaux, et les formules (24), notamment, ont été données par M. Brioschi.

Si, dans l'équation (25), on remplace F par u^2, cette équation devient :

$$u'' + pu' + qu + \frac{c^2}{4} u^{-3} e^{-2\int p dx} = 0.$$

Nous pouvons passer maintenant au cas où l'on donnerait le produit de quatre solutions particulières.

Digitized by Google

Reprenons l'équation (23) mise sous la forme :

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = ce^{-\int p dx},$$

et, comme nous aurons à considérer ici plus de deux solutions, nous écrirons :

$$y_n y_m' - y_m y_n' = c_{nm} e^{-\int p dx},$$

la constante c_{nm} représentant celle qui convient aux deux solutions particulières y_n, y_m. D'après cette notation, $c_{nm} = -c_{mn}$.

Calculons d'abord y_3 et y_4 en fonction de y_1, y_2, p et des constantes analogues à c_{nm}.

On a :

$$y_3 = ay_1 + by_2;$$

$$y_1 y_3' - y_3 y_1' = c_{13} e^{-\int p dx} = b(y_1 y_2' - y_2 y_1') = b c_{12} e^{-\int p dx} \quad \text{d'où} \quad b = \frac{c_{13}}{c_{12}};$$

$$y_2 y_3' - y_3 y_2' = c_{23} e^{-\int p dx} = -a(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -a c_{12} e^{-\int p dx}, \text{ d'où } a = -\frac{c_{23}}{c_{12}}.$$

Donc :

$$y_3 = -\frac{c_{23}}{c_{12}} y_1 + \frac{c_{13}}{c_{12}} y_2$$

et de même :

$$y_4 = -\frac{c_{24}}{c_{12}} y_1 + \frac{c_{14}}{c_{12}} y_2 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Relation entre les six constantes. — Appliquant les formules que l'on vient de trouver, on a :

$$y_1 = -\frac{c_{41}}{c_{34}} y_3 + \frac{c_{31}}{c_{34}} y_4 = -\frac{c_{41}}{c_{34}}\left(-\frac{c_{23}}{c_{12}} y_1 + \frac{c_{13}}{c_{12}} y_2\right) + \frac{c_{31}}{c_{34}}\left(-\frac{c_{24}}{c_{12}} y_1 + \frac{c_{14}}{c_{12}} y_2\right),$$

d'où :

$$c_{12}c_{34} + c_{13}c_{42} + c_{14}c_{23} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

relation symétrique, déterminant l'une des constantes en fonc-

Digitized by Google

tion des cinq autres, ou plutôt l'un des cinq rapports $\frac{c_{13}}{c_{12}}, \frac{c_{14}}{c_{12}}, \ldots$ en fonction des quatre autres.

Le dénominateur commun c_{12} est déterminé par le choix même des deux solutions particulières y_1, y_2, et quatre des cinq rapports sont évidemment arbitraires.

Une identité remarquable (*). — On a :

$$\left.\begin{aligned} &e^{\int p\,dx}\left(\frac{D\sqrt{y_1y_2}}{\sqrt{y_1y_2}} - \frac{D\sqrt{y_3y_4}}{\sqrt{y_3y_4}}\right) = \\ &\pm\frac{1}{2}\sqrt{c_{12}^2y_1^{-2}y_2^{-2} + c_{34}^2y_3^{-2}y_4^{-2} + 2(c_{13}c_{24} + c_{14}c_{23})\,y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1}} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Pour vérifier cette identité, on commencera par développer les dérivées; alors, par un groupement convenable des termes, le premier membre se réduira immédiatement à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_{32}}{y_2y_3} + \frac{c_{41}}{y_1y_4}\right).$$

Chassant les dénominateurs, élevant au carré, supprimant deux termes en $y_1y_2y_3y_4$, qui se réduisent (**), puis remplaçant enfin y_3 et y_4 d'après les équations (26), l'identité deviendra manifeste.

L'identité (28) se transforme aisément en cette autre :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{e^{-\int p\,dx}\,dx}{\sqrt{y_1y_2y_3y_4}} = \pm 2\,\frac{d\sqrt{\frac{y_3y_4}{y_1y_2}}}{\sqrt{c_{12}^2\left(\sqrt{\frac{y_3y_4}{y_1y_2}}\right)^4 + 2(c_{13}c_{24} + c_{14}c_{23})\left(\sqrt{\frac{y_3y_4}{y_1y_2}}\right)^2 + c_{34}^2}} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Au moyen de deux quadratures, dont l'une se ramène aux

(*) Cette identité n'a pas été trouvée par hasard. La marche suivie est la même que pour le produit de *deux* intégrales, et l'équation (28) est, au fond, une intégrale première analogue à (23). Mais il convient de s'assurer, par la vérification directe, que les constantes sont bien déterminées.

(**) Il en reste un, qui ne peut se réduire.

Digitized by Google

intégrales elliptiques de première espèce, on déterminera le rapport $\frac{y_3 y_4}{y_1 y_2}$. Le reste s'achèvera facilement. Mais la forme du résultat obtenu peut conduire à certaines remarques sur la théorie même des intégrales elliptiques.

Première application. — Soit $p = q = 0$.

Alors on peut prendre, comme solutions particulières :

$$y_1 = x - a_1, \quad y_2 = x - a_2, \quad y_3 = x - a_3 \quad y_4 = x - a_4,$$

et la formule (29) devient :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}} = \\ &\pm 2 \frac{d\sqrt{\frac{(x-a_3)(x-a_4)}{(x-a_1)(x-a_2)}}}{\sqrt{(a_1-a_3)^2(\sqrt{-})^4 + 2\left[(a_1-a_3)(a_2-a_4) + (a_1-a_4)(a_2-a_3)\right](\sqrt{-})^2 + (a_3-a_4)^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Seconde application. — Soit

$$p = -\frac{\alpha + \beta - 2x}{(x-\alpha)(x-\beta)}, \quad q = \frac{2}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

On peut prendre :

$$y_1 = (x-\alpha)^2, \quad y_2 = (x-\beta)^2, \quad y_3 = (x-\alpha)^2 + M(x-\beta)^2. \quad y_4 = (x-\alpha)^2 + N(x-\beta)^2.$$

Alors on a :

$$c_{12} = 2(\beta-\alpha), \quad c_{13} = 2M(\beta-\alpha), \quad c_{14} = 2N(\beta-\alpha) \quad c_{23} = -2(\beta-\alpha),$$
$$c_{24} = -2(\beta-\alpha), \quad c_{34} = 2(N-M)(\beta-\alpha)$$

Digitized by Google

La formule (29) devient donc, en supposant $\beta - \alpha$ différent de zéro :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{\sqrt{[(x-\alpha)^2+M(x-\beta)^2][(x-\alpha)^2+N(x-\beta)^2]}} = \\ \pm\frac{1}{(\beta-\alpha)}\frac{d\sqrt{\frac{[(x-\alpha)^2+M(x-\beta)^2][(x-\alpha)^2+N(x-\beta)^2]}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}}}{\sqrt{(\sqrt{-})^4-2(M+N)(\sqrt{-})^2+(N-M)^2}}.\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

On pourrait transformer le premier membre de cette dernière expression, en posant :

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-M}}{1+\sqrt{-M}} = a_1, \text{ etc.},$$

de manière à l'identifier avec le premier membre de (30), mais le second membre deviendrait compliqué. Je ne m'y arrêterai pas.

L'identité (30), qui peut servir à la transformation des intégrales elliptiques, se vérifie directement. Le moyen le plus simple, je pense, consiste à différentier l'équation

$$y^2 = \frac{(x-a_3)(x-a_4)}{(x-a_1)(x-a_2)}, \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

à diviser par $2y$ et à mettre le résultat sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-a_3-a_4-y^2(2x-a_1-a_2)}{2\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}.$$

Comparant cette équation à (30), $\frac{dy}{dx}$ disparaîtra, ainsi que le radical $\sqrt{(x-a_1)\ldots}$, et il restera à vérifier une équation contenant x au premier degré. Or, la valeur de x, déduite de cette

Digitized by Google

équation, coïncide avec celle que l'on déduirait directement de (32).

Mais il est temps de terminer cette digression, qui nous conduirait à la transformation des intégrales elliptiques, et de reprendre l'étude des équations linéaires du second ordre.

La connaissance des produits de deux intégrales d'une de ces équations permet, comme MM. Hermite et Brioschi l'ont fait voir, de trouver l'équation linéaire qui a pour intégrales deux puissances semblables de ces deux intégrales particulières.

Reprenons cette recherche, en essayant d'en déduire des conséquences à notre point de vue spécial.

Proposons-nous de trouver l'équation linéaire

$$z'' + Pz' + Qz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

qui a pour solutions $z_1 = y_1^{\omega}$, et $z_2 = y_2^{\omega}$, problème résolu par M. Hermite (*), mais au moyen d'une méthode indirecte.

Il suffira d'élever les valeurs (24) à la puissance ω, et de calculer P et Q de manière que ces deux solutions répondent à l'équation (33), ce qui revient, au fond, à résoudre deux équations du premier degré à deux inconnues.

Les calculs se font assez rapidement, si l'on a soin de remplacer $e^{\int p dz}$ par sa valeur tirée de (25), chaque fois que cette exponentielle se présente au carré. On peut alors se borner à substituer l'une des valeurs z_1 ou z_2 dans l'équation (33), et comme le signe de c est arbitraire, on annulera séparément le coefficient de $e^{-\int p dz}$ et la partie qui ne contient pas ce facteur. Les deux équations obtenues, résolues par rapport à P et à Q, donneront :

$$\left.\begin{aligned} P &= p + (1-\omega)\,F^{-1}F', \\ Q &= \omega^2 q + \frac{1}{2}(\omega^2-\omega)pF^{-1}F' + \frac{1}{2}(\omega^2-\omega)\,F^{-1}F'' \quad (**) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (34)$$

(*) *Annali di Matematica pura ed applicata*, diritti dal prof Francesco Brioschi, serie II, t. X.

(**) Ces résultats s'accordent avec ceux de M. Hermite, après correction de deux fautes d'impression existant dans ces derniers.

Digitized by Google

Le calcul suivant, peut-être plus court et plus élégant que tout autre, peut servir de vérification à ce qui précède.

On a, d'après l'équation (23) :

$$\frac{(y_1\omega)'}{y_1\omega} - \frac{(y_2\omega)'}{y_2\omega} = Ce^{-\int P dx} y_1^{-\omega} y_2^{-\omega};$$

d'où, en exécutant les différentiations et invoquant de nouveau l'équation (23) :

$$CF^{-\omega} e^{-\int P dx} = \omega c F^{-1} e^{-\int P dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

ce qui résulte aussi, d'ailleurs, de la simple inspection des équations (24), appliquées successivement, par la pensée, aux variables y et z.

Pour trouver P, il suffit de passer aux logarithmes, puis de différentier; pour trouver ensuite Q, on reprend l'équation (35), on y remplace $Ce^{-\int P dx}$ et $ce^{-\int P dx}$, puis P, respectivement d'après l'équation (25), et le résultat auquel on vient d'arriver. On aboutit ainsi, une troisième fois, aux valeurs de P et de Q obtenues par M. Hermite; mais les deux méthodes que je viens d'indiquer sont basées, l'une directement, l'autre indirectement, sur l'emploi des valeurs (24), tandis que dans la Note de M. Hermite il n'est pas question de ces valeurs.

On retrouve aisément les équations (24) au moyen de (33), en observant que cette dernière doit avoir deux intégrales particulières en commun avec l'équation qu'on déduirait de (19) par la substitution de $z^{\frac{1}{\omega}}$ au lieu de y.

Mais, au point de vue spécial où nous sommes placés, nous devons chercher à utiliser les formules de M. Hermite de manière à répondre aux données de l'un des trois théorèmes fondamentaux.

Le théorème III paraît être ici hors de cause.

Essayons d'appliquer les deux autres.

Nous savons passer de l'équation

$$y'' + py' + qy = 0$$

Digitized by Google

à l'équation

$$z'' + Pz' + Qz = 0,$$

P et Q ayant les valeurs données par (34).

En posant, dans la première :

$$y = Ye^{-\frac{1}{2}\int p dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

et dans la seconde :

$$z = Ze^{-\frac{1}{2}\int P dx},$$

elles deviennent :

$$Y^{-1}Y'' = -q + \frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4},$$

$$Z^{-1}Z'' = -Q + \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4},$$

équations dont il faut comparer les seconds membres entre eux.

Développant la quantité

$$-Q + \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4},$$

par les formules (34), et simplifiant au moyen de (25), on trouve :

$$-Q + \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4} = -q + \frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{(\omega^2 - 1)c^2}{4F^2} e^{-2\int p dx} \quad \ldots \quad (37)$$

Ce résultat fait voir que le théorème II est celui qui paraît ici le plus facilement applicable. Mais il faudrait, pour cela, pouvoir réduire, soit à une constante, soit au moins à une fonction U déterminée et choisie une fois pour toutes, la quantité

$$\frac{(\omega^2 - 1)c^2}{4F^2} e^{-2\int p dx}.$$

Digitized by Google

Entrons dans quelques détails à ce sujet. Il s'agit (Th. II) de savoir passer de la fonction X + U à la fonction X (*).

Posons :

$$\left.\begin{aligned} X + U &= -q + \frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4} \\ -U &= \frac{(\omega^2 - 1)c^2}{4F^2} e^{-2\int p\,dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

Il viendra :

$$X = -Q + \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4},$$

et le problème se réduira à savoir passer de

$$-q + \frac{p'}{2} + \frac{p^2}{4}$$

à

$$-Q + \frac{P'}{2} + \frac{P^2}{4},$$

ce qui est précisément celui de M. Hermite ; mais, pour qu'il soit réellement utilisé, il faut que les équations (38) nous permettent de déterminer p, q et F.

De la seconde on déduit :

$$F^{-1} e^{-\int p\,dx} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{U}{1 - \omega^2}},$$

et, en substituant dans (24) :

$$y_1 = c'^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} e^{\int \sqrt{\frac{U}{1-\omega^2}}\,dx},$$

$$y_2 = c'^{-\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} e^{-\int \sqrt{\frac{U}{1-\omega^2}}\,dx};$$

(*) Il suffirait, à la rigueur, de savoir passer à la fonction X au moyen de X + U et de X + kU, mais le problème serait résolu *a fortiori* si la forme X + U nous suffisait.

Digitized by Google

d'où, en vertu de (36) :

$$Y_1 = c'^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int p dx} e^{\int \sqrt{\frac{U}{1-\omega^2}} dx} = c'^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{U}{1-\omega^2}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{\int \sqrt{\frac{U}{1-\omega^2}} dx},$$

$$Y_2 = c'^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int p dx} e^{-\int \sqrt{\frac{U}{1-\omega^2}} dx} = c'^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{U}{1-\omega^2}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\int \sqrt{\frac{U}{1-\omega^2}} dx}.$$

On peut vérifier directement que Y_1 et Y_2 sont bien des solutions d'une même équation linéaire à deux termes, quel que soit U.

Mais, comme on doit avoir :

$$X + U = Y_1^{-1} Y_1'',$$

la valeur de X n'est pas quelconque. Elle dépend de U et est égale à

$$-U + \frac{D^2\left(e^f f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{e^f f'^{-\frac{1}{2}}},$$

avec

$$f = \int \sqrt{\frac{U}{1-\omega^2}} dx.$$

Pour cette valeur de X, la première des équations (38) se vérifiera toujours quand la seconde sera exacte, et il s'ensuit que l'on peut prendre au hasard p ou F.

La solution s'achève alors facilement; mais la conclusion est simplement que l'on sait passer de

$$X + U = \frac{D^2\left(e^f f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{e^f f'^{-\frac{1}{2}}}$$

à

$$X = \frac{D^2\left(e^f f^{-\frac{1}{2}}\right)}{e^f f'^{-\frac{1}{2}}} - (1-\omega^2) f'^2 = \omega^2 f'^2 + \frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}.$$

Digitized by Google

On voit que ce calcul ne nous apprend rien de nouveau. Il nous ramène à l'intégration de l'équation

$$\frac{y''}{y} = \omega^2,$$

par la transformation fondamentale.

§ III.

Emploi des équations différentielles linéaires simultanées.

Dans le numéro de juin 1885 du journal *Mathesis*, j'ai fait observer que s'il existait une condition d'intégrabilité

$$F(P_1,\ Q_1,\ P_2,\ Q_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

des équations simultanées

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + P_1 y + Q_1 z &= 0 \\ \frac{dz}{dx} + P_2 y + Q_2 z &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

telle que P_1 et Q_2 y entrassent autrement que par l'intermédiaire du binôme $P_1 - Q_2$, on saurait intégrer tous les systèmes analogues à (40), et par conséquent aussi toutes les équations linéaires du second ordre.

Des réflexions ultérieures sur le même sujet m'ont fait reconnaître que cet énoncé est un cas très particulier d'une propriété plus générale, que je vais exposer.

Digitized by Google

A cet effet, je prendrai comme point de départ l'équation (5) de ma Note précédente, c'est-à-dire la condition d'intégrabilité

$$\frac{U}{2Q_1} \pm \sqrt{\frac{U^2}{4Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_1}} = e^{\int (P_1 - Q_2 - U)dx} \quad \ldots\ldots (41)$$

dans laquelle U représente une fonction de x, quelconque, mais supposée connue.

Essayons de déterminer U au moyen de P_1, Q_1, P_2 et Q_2.

En posant :

$$v = Q_1 e^{\int (P_1 - Q_2 - U)dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1'}{Q_1} + P_1 - Q_2\right)$$

$$= Q_1 e^{\int (P_1 - Q_2 - U)dx} + \lambda,$$

on trouve, très simplement :

$$v' + v^2 = P_2 Q_1 + \lambda' + \lambda^2. \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Cette équation (42) donne lieu à plusieurs observations, que l'on pourrait déduire, presque aussi facilement, d'une inspection attentive des équations (40) elles-mêmes. Je me bornerai aux deux remarques suivantes.

a. La composition du terme λ montre pourquoi la possibilité d'intégration du système (40) ne dépend que de la différence $P_1 - Q_2$, et non de ces deux coefficients séparément.

b. L'équation (42) n'est, au fond, qu'une résultante des équations (40).

En effet, l'élimination de z et de $\frac{dz}{dx}$ entre ces deux équations et la dérivée de la première donne la résultante connue :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(P_1 - \frac{Q_1'}{Q_1} + Q_2\right)\frac{dy}{dx} + \left(P_1' + P_1 Q_2 - P_2 Q_1 - P_1 \frac{Q_1'}{Q_1}\right) y = 0. \quad (43)$$

Digitized by Google

En remplaçant y par

$$e^{\int dx\left(v-\frac{1}{2}P_1-\frac{1}{2}Q_2+\frac{1}{2}\frac{Q_1'}{Q_1}\right)},$$

on trouvera que v est déterminé par l'équation (42).

Ainsi, lorsqu'on ne sait pas résoudre directement les équations (40) par la méthode ordinaire, on ne sait pas non plus trouver la fonction U qui devrait être connue pour que la méthode de M. Ibach, même généralisée, fût applicable.

Tous ces calculs nous font donc tourner dans un cercle vicieux, comme cela arrive généralement quand on s'occupe des équations linéaires du second ordre.

Cependant il n'est pas certain que la résultante du système (40) ait déjà été obtenue sous la forme (42), et comme cette forme est très simple, elle permet de constater des propriétés peut-être nouvelles. Je développerai les deux suivantes :

1° On peut prendre aussi bien la résultante en z que la résultante en y; on voit donc que les deux équations

$$v' + v^2 = P_2Q_1 + \frac{1}{2}\left(Q_2 - P_1 - \frac{Q_1'}{Q_1}\right)' + \frac{1}{4}\left(Q_2 - P_1 - \frac{Q_1'}{Q_1}\right)^2$$

et

$$w' + w^2 = P_2Q_1 + \frac{1}{2}\left(P_1 - Q_2 - \frac{P_2'}{P_2}\right)' + \frac{1}{4}\left(P_1 - Q_2 - \frac{P_2'}{P_2}\right)^2$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables.

En posant :

$$Q_2 - P_1 - \frac{Q_1'}{Q_1} = 2\alpha, \quad P_1 - Q_2 - \frac{P_2'}{P_2} = 2\beta,$$

d'où :

$$P_2Q_1 = e^{-2\int(\alpha+\beta)\,dx},$$

le théorème prend la forme suivante :

Digitized by Google

Les deux équations

$$\left.\begin{aligned} v' + v^2 &= \alpha' + \alpha^2 + e^{-2\int(\alpha+\beta)\,dx} \\ w' + w^2 &= \beta' + \beta^2 + e^{2\int(\alpha+\beta)\,dx} \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \ldots\ldots (44)$$

sont simultanément intégrables ou non intégrables.

Si $\beta = -\alpha$, les seconds membres deviennent

$$\alpha' + \alpha^2 + c \quad \text{et} \quad -\alpha' + \alpha^2 + c.$$

Sous cette forme, le théorème est certainement connu; il l'est peut-être aussi sous sa forme générale.

2° Essayons de résoudre le problème suivant, auquel se ramène, comme je l'ai déjà dit, l'intégration de toutes les équations linéaires du second ordre :

On donne l'intégrale de

$$t'' + t'^2 = F(x) + k,$$

trouver celle de

$$t' + t'^2 = F(x). \quad \ldots\ldots\ldots (45)$$

A cet effet, essayons d'identifier (45) avec la résultante (42) du système (40).

Il suffit, pour cela, de prendre :

$$v = t', \quad P_2Q_1 + \lambda' + \lambda^2 = F(x) = -k + F(x) + k;$$

ou :

$$P_2Q_1 = -k \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$
$$\lambda' + \lambda^2 = F(x) + k;$$

mais, par hypothèse, cette dernière équation est intégrable; on peut donc poser :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1'}{Q_1} + P_1 - Q_2\right) = \lambda, \quad \ldots\ldots (47)$$

λ étant une fonction connue.

Digitized by Google

On voit qu'il suffit de déterminer P_1, Q_1, P_2, Q_2 par les équations (46) et (47), pour que l'équation à intégrer soit précisément la résultante du système (40); pour résoudre le problème, il est donc nécessaire et suffisant que ce système (40) soit intégrable. Donc, enfin :

« S'il existait une condition d'intégrabilité

$$F(P_1, Q_1, P_2, Q_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

telle qu'en la combinant avec les équations

$$P_2 Q_1 = -k$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1'}{Q_1} + P_1 - Q_2\right) = \lambda$$

(fonction connue de x) on parvînt à déterminer les quatre fonctions P_1, Q_1, P_2, Q_2 (dont l'une est d'ailleurs arbitraire), on saurait intégrer tous les systèmes d'équations simultanées analogues à (40) et toutes les équations linéaires du second ordre. »

Il est facile de voir, d'abord, qu'aucune des conditions d'intégrabilité connues ne satisfait à cet énoncé; ensuite, que ce dernier renferme, comme cas très particulier, l'énoncé auquel j'ai fait allusion précédemment.

En effet, si F contenait P_1 et Q_2 autrement que sous la forme $P_1 - Q_2$, on se donnerait P_2 au hasard, on déterminerait Q_1 par l'équation (46), puis P_1 et Q_2 par (47) et (48), lesquelles deviennent contradictoires si P_1 et Q_2 n'entrent dans la condition d'intégrabilité que sous la forme $P_1 - Q_2$. Si (48) ne contenait ni P_1 ni Q_2, la solution serait plus facile encore (*).

Il est essentiel d'observer aussi que, dans le nouvel énoncé, la forme $F(P_1, Q_1, P_2, Q_2)$ peut contenir des dérivées et des intégrales (contrairement à ce qui était supposé dans l'énoncé primitif), pourvu qu'un choix convenable de l'une des quatre variables permette de déterminer complètement les trois autres.

(*) Un autre cas remarquable serait celui où la condition (48) ne contiendrait P_2 et Q_1 que par l'intermédiaire du produit $P_2 Q_1$.

Digitized by Google

§ IV.

Transformations des équations du premier ordre.

L'équation linéaire du second ordre

$$z'' = z\psi(x)$$

se transforme, en posant :

$$z = e^{\int y dx},$$

en celle-ci :

$$y' + y^2 = \psi(x); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

et par conséquent les deux premiers théorèmes généraux du § I[er] sont applicables à l'équation (49).

Il est donc naturel de chercher à employer les transformations que l'on connaît pour les équations du premier ordre.

Transformation de M. Mansion. — M. Mansion a démontré (*) que toute équation du premier ordre peut, moyennant une certaine transformation des variables, prendre la forme d'une équation de Clairaut; et que la transformation nécessaire à cet effet peut être très facilement découverte quand on connaît l'intégrale générale de l'équation donnée.

De là semble résulter, à première vue, un moyen simple de réaliser les conditions du théorème II.

En effet, il résulte de ce théorème qu'il suffirait, étant donnée l'intégrale de

$$y' + y^2 - \psi(x) = 0,$$

(*) *Bull. de l'Ac. roy. de Belgique,* 2[e] sér., t. XLIII (fr. 1877), p. 186.

Digitized by Google

de savoir découvrir celle de

$$y' + y^2 - \psi(x) = a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Or, on peut transformer la première en équation de Clairaut par la méthode de M. Mansion, et si cette opération réussissait par simple substitution, sans suppression d'aucun facteur, il est visible que la seconde équation deviendrait également une équation de Clairaut, et serait donc intégrable.

Malheureusement, l'équation du premier ordre ne se ramène à une équation de Clairaut que moyennant la suppression de certains facteurs étrangers, que l'on ne peut plus faire disparaître quand le second membre est a au lieu d'être zéro.

Si, dans la transformation de

$$y' + y^2 - \psi(x) = 0,$$

les facteurs étrangers étaient réductibles à une forme $\rho(x)$ indépendante de la forme ψ, cela suffirait encore, car alors on saurait intégrer

$$y' + y^2 - \psi(x) = k\rho(x),$$

c'est-à-dire déduire l'intégrale de cette dernière équation de celle de l'équation précédente, ce qui permettrait encore d'appliquer le théorème II.

Si, au contraire, la forme ρ était équivalente à la forme ψ, on saurait intégrer

$$y' + y^2 - \psi(x) = k\psi(x),$$

ou

$$y' + y^2 = (k+1)\psi(x),$$

ce qui ramènerait, cette fois, au théorème I. Mais on va voir qu'aucune de ces circonstances favorables ne se réalise.

Pour appliquer le théorème de M. Mansion, de la manière la plus simple, à l'équation (50), il faut poser

$$y = \frac{Y\varphi_1'(x) + x\varphi_2'(x)}{Y\varphi_1(x) + x\varphi_2(x)},$$

Digitized by Google

φ_1 et φ_2 étant deux solutions particulières distinctes de

$$\varphi''(x) = \varphi(x)\psi(x).$$

On trouvera alors, sans aucun artifice de calcul, et sans introduction ni suppression d'aucun facteur (*), cette autre équation :

$$D_x\left(\frac{Y}{x}\right) = -a\left(\frac{Y}{x}\varphi_1 + \varphi_2\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51).$$

On voit que, par rapport à l'équation de Clairaut, le facteur étranger est

$$-\frac{1}{(Y\varphi_1 + x\varphi_2)^2}.$$

Il ne répond à aucune des conditions exigées.

L'équation (51) ne peut pas être intégrée; du moins je n'en vois pas le moyen; mais on peut en tirer une conséquence remarquable.

Supposons que l'on donne les intégrales de

$$y' + y^2 = \psi(x)$$

et de

$$y' + y^2 = \psi(x) + a,$$

et qu'il faille chercher celle de

$$y' + y^2 = \psi(x) - a,$$

ce qui répond encore au théorème II.

L'intégrale de (51) sera connue, et il faudra en déduire celle de

$$D_x\left(\frac{Y}{x}\right) = +a\left(\frac{Y}{x}\varphi_1 + \varphi_2\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

(*) Mais en remplaçant φ_1'' par $\psi\varphi_1$, ainsi que φ_2'' par $\psi\varphi_2$, et en éliminant les dérivées premières φ_1' et φ_2' par la relation

$$\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' = 1.$$

Digitized by Google

On obtient par là un théorème de réduction, dont voici l'énoncé :

« On pourrait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre si l'on savait trouver l'intégrale de

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi(x, y), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

au moyen de celle de

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

supposée connue. »

Plus généralement, il suffit de savoir passer de

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

à

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\varphi(x, y),$$

pour une seule valeur de α. Cela résulte tout aussi facilement de la théorie précédente, parce que le terme $-a$ de l'équation (51) peut être remplacé par une constante quelconque, différente de $+a$.

On peut le démontrer autrement. En effet, l'intégrale de

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = F(x),$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + F(x),$$

conduira alors à celle de

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha y^2 + \alpha F(x),$$

ou de

$$\frac{dy}{dx} + \alpha y^2 = \alpha F(x),$$

Digitized by Google

ou encore de

$$\frac{d(\alpha y)}{dx} + (\alpha y)^2 = \alpha^2 F(x).$$

Or, la possibilité de multiplier le second membre par α^2 ramène au théorème I.

On voit cependant qu'il y a exception pour $\alpha^2 = 1$, donc non seulement pour $\alpha = 1$, mais aussi pour $\alpha = -1$. La démonstration déduite de la théorie de M. Mansion ne comporte pas ce cas d'exception. On peut même remplacer α par une fonction quelconque, mais déterminée, de x.

Signalons, enfin, trois formes symétriques que l'on peut donner à l'équation restant à résoudre :

$$\frac{D_x\left(\frac{Y}{x}\right)}{\left(\frac{Y}{x}\varphi_1 + \varphi_2\right)^2} = -a.$$

En faisant

$$\frac{Y}{x} = u, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = v,$$

d'où :

$$\frac{1}{\varphi_1^2} = v',$$

on trouve :

$$\frac{u'v'}{(u+v)^2} = -a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55).$$

Si l'on prend $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$ (mais en considérant alors a comme une fonction de x), les équations (51) et (52) se réduisent à

$$\frac{u'}{(u+x)^2} = -a,$$

$$\frac{v'}{(v+x)^2} = a,$$

Digitized by Google

et l'équation restant à résoudre prend la forme symétrique

$$\frac{u'}{(u+x)^2} + \frac{v'}{(v+x)^2} = 0 \text{ (*)}. \quad \ldots \quad (56).$$

Enfin, si l'on reprend les équations (53) et (54), après avoir changé dans la première le signe de x (ce qui change aussi le signe de $\frac{dy}{dx}$), on voit que l'intégration des équations linéaires du second ordre est ramenée à intégrer l'une des deux équations suivantes, au moyen de l'intégrale de l'autre, supposée connue :

$$u' = \varphi(-x, u),$$
$$v' = \varphi(x, v).$$

En résolvant ces équations par rapport à x, puis éliminant cette variable indépendante, on trouve :

$$\psi(u, u') + \psi(v, v') = 0,$$

équation analogue à (56), mais ne contenant plus x.

Les considérations précédentes auraient pu être déduites également d'un Mémoire de M. Ch. Lagrange (**).

Mais je présenterai ici une autre déduction des formules contenues dans ce Mémoire.

M. Lagrange recherche la valeur de $\psi(x)$, intégrale de l'équation

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_1''(x)}{\varphi_1(x)} + a = \frac{\varphi_2''(x)}{\varphi_2(x)} + a \quad \ldots \quad (57).$$

Il trouve la formule suivante :

$$\psi(x) = X_0 + X_1\frac{a}{1} + X_2\frac{a^2}{1.2} + \cdots + X_\rho\frac{a^\rho}{1.2\ldots\rho}, \quad \ldots \quad (58)$$

(*) L'une des fonctions u ou v étant donnée et l'autre inconnue.

(**) Voyez *Bull de l'Ac.*, 3e série, t. X. *Ann. de l'Observatoire*, t. VII (nouvelle série), 1886

Digitized by Google

avec

$$X_0 = \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

et

$$X_\rho = -\rho\varphi_1(x)\int \varphi_2(x) X_{\rho-1}\, dx + \rho\varphi_2(x)\int \varphi_1(x) X_{\rho-1}\, dx \quad . \quad (60).$$

(Je prends, comme précédemment :

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\int \varphi_1^{-2}(x)dx\,,$$

d'où :

$$\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = 1.)\,(*)$$

Sans doute, ce n'est là qu'un développement en série, tandis que pour la solution du problème se rapportant au théorème II il faudrait pouvoir sommer cette série; mais celle-ci peut être moins rebelle à la sommation que les séries obtenues par les méthodes ordinaires.

Si l'on savait déduire la valeur de ψ de celle de φ (**), c'est-à-dire résoudre le problème de M. Lagrange (mais sans séries), on saurait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, et par conséquent calculer φ lui-même (toujours sans séries) au moyen de $\frac{\varphi''}{\varphi}$.

Ainsi les calculs de M. Lagrange (si l'on pouvait trouver la somme de sa série) conduiraient au delà du but que l'auteur se proposait.

Il voulait simplement, étant données les équations

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = X \quad \text{et} \quad \frac{\psi''}{\psi} = X + a,$$

calculer ψ au moyen de X, de φ et de a, supposés connus; mais si cela était possible, on pourrait faire davantage et calculer φ et ψ au moyen de X et de a seulement. Il y aurait donc un

(*) Voir une démonstration directe de la formule (60) dans le *Bulletin* cité, p. 543.

(**) Intégrale générale dont φ_1 et φ_2 sont deux valeurs particulières.

Digitized by Google

grand intérêt à pouvoir sommer la série en n'employant que des quadratures et des éliminations.

Il ne serait pas même nécessaire de trouver la somme de la série (58), mais seulement une relation, en termes finis, entre cette somme et celle de l'autre série :

$$\chi(x) = X_0 - X_1\frac{a}{1} + X_2\frac{a^2}{1.2} - \cdots + (-1)^\rho X_\rho \frac{a^\rho}{1.2\ldots\rho}, \quad . \quad (61)$$

laquelle est évidemment l'intégrale de

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - a = X - a.$$

En effet, il résulte encore du théorème II que si l'on pouvait, au moyen de φ et de ψ, connaître χ, on arriverait à la détermination complète de φ, de ψ et de χ au moyen de X et de a, c'est-à-dire qu'on intégrerait toutes les équations linéaires du second ordre.

Nous allons essayer, maintenant, d'appliquer à l'équation

$$y' + y^2 = X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

nos théorèmes fondamentaux, en profitant des recherches qui ont été faites pour la détermination du facteur d'intégrabilité de cette équation.

En adoptant comme facteur

$$\frac{P}{y^2 + 2Qy + R},$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, on trouve (*) que ces trois fonctions sont déterminées par les équations

$$2PQ - \frac{dP}{dx} = 0, \quad 2PR + 2PX - 2Q\frac{dP}{dx} + 2P\frac{dQ}{dx} = 0,$$

$$2PQX - R\frac{dP}{dx} + P\frac{dR}{dx} = 0.$$

(*) Lacroix, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, 2e édition, t. II; Paris 1814; p. 277.

Digitized by Google

Ces équations ne peuvent être intégrées ; mais, d'après nos théorèmes, il suffirait qu'on y pût voir comment se modifient P, Q et R lorsque X devient kX ou X + k.

Cela arriverait, par exemple, pour kX, si les équations étaient homogènes en P, Q, R, X ; mais la seconde seule satisfait à cette condition.

Lacroix en déduit la valeur intégrable

$$X = -Q' + Q^2 + e^{\int kQdx},$$

ou, en changeant Q en − Q :

$$Q' + Q^2 + e^{-\int kQdx}.$$

L'intégration de (62) se ramène donc à celle de

$$Q' + Q^2 + e^{-\int kQdx} = X,$$

ou, en faisant $Q = \frac{z'}{z}$:

$$z'' + z^{-3} = Xz.$$

C'est l'équation que nous avons déjà rencontrée à deux reprises (*) comme équivalente à

$$z'' = Xz.$$

Nous n'apprenons donc rien de nouveau et la considération directe des facteurs d'intégration de $z'' = Xz$ (**) conduirait probablement à des résultats analogues.

On voit cependant, à la page 362 de Lacroix, que l'équation

$$y'' + \left(\frac{I'}{2I} + \frac{K'}{2K}\right)y' + \left(\frac{CI}{K} + \frac{I''}{2I} + \frac{K'I'}{4KI} - \frac{I'^2}{2I^2}\right)y = 0 \quad . \quad . \quad (63)$$

(*) Pages 20 et 31.

(**) Lacroix, ouvrage cité, pp. 353 et suivantes.

Digitized by Google

a pour intégrale

$$y = \frac{1}{\sqrt{I}}\left(ce^{\int\sqrt{-\frac{CI}{K}}dx} + c_1 e^{-\int\sqrt{-\frac{CI}{K}}dx}\right)$$

et la présence de la constante C au dernier terme de (63) conduit à se demander si l'on ne pourrait pas utiliser ici l'un des théorèmes de réduction. Mais on en déduit simplement que l'expression

$$-\frac{CI}{K} - \frac{I''}{4I} - \frac{K'I'}{8KI} + \frac{5I'^2}{16I^2} - \frac{3K'^2}{16K^2} + \frac{K''}{4K}$$

est toujours intégrable, quelles que soient les fonctions I et K, et dès que l'on veut particulariser davantage, on retombe sur ce qui est connu.

On peut, enfin, essayer de ramener l'équation linéaire du second ordre, non seulement à une équation du premier, mais à une équation *linéaire* du premier ordre. Comme cette méthode conduit rationnellement à des équations aux dérivées partielles, j'ai cru devoir l'introduire dans le § VI.

§ V.

Emploi des intégrales définies.

Dans une Note, déjà citée, sur l'équation de Riccati, j'ai appliqué les intégrales définies à la résolution de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x),$$

et, tout en échouant sur le point principal, je suis arrivé à des conclusions que je me propose de retrouver ici par une méthode généralisée.

Digitized by Google

Au lieu de prendre les limites 0 et ∞, comme dans la formule de M. Boussinesq :

$$D_x^2\left[\int_0^{\infty}\varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)du\right]=\int_0^{\infty}\varphi'\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi'\left(\frac{u^2}{2}\right)du, \quad . \quad (64)$$

je vais essayer d'adopter les limites quelconques $\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$; mais alors, pour ne pas tomber dans de grandes complications, je remplacerai x^2 par $\theta_1^2(x)\theta_2^2(x)$.

Soit donc :

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varphi\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)du.$$

On a :

$$\frac{dI}{dx}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varphi'\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)\frac{D_x(\theta_1^2\theta_2^2)}{2u^2}du+F_x;$$

avec

$$F_x=\varphi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\psi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\theta_2'-\varphi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\psi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\theta_1'.$$

L'intégrale restante se transforme aisément, en prenant pour nouvelle variable $\frac{\theta_1\theta_2}{u}=t$, ce qui renverse les limites.

Elle devient alors :

$$(\theta_1\theta_2)'\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varphi'\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)\frac{\theta_1\theta_2}{u^2}du=-(\theta_1\theta_2)'\int_{\theta_2}^{\theta_1}\varphi'\left(\frac{t^2}{2}\right)\psi\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2t^2}\right)dt$$

$$=(\theta_1\theta_2)'\int_{\theta_1}^{\theta_2}\psi\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}\right)\varphi'\left(\frac{u^2}{2}\right)du.$$

$$\frac{dI}{dx}=(\theta_1\theta_2)'\int_{\theta_1}^{\theta_2}\psi\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}\right)\varphi'\left(\frac{u^2}{2}\right)du+F_x.$$

Digitized by Google

Différentiant de nouveau et opérant de même, on trouverait :

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = (\theta_1\theta_2)' \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}\right)\varphi'\left(\frac{u^2}{2}\right)du + (\theta_1\theta_2)'^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi'\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}\right)\psi'\left(\frac{u^2}{2}\right)du + (\theta_1\theta_2)'F_2 + F_1',$$

avec

$$F_2 = \psi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\varphi'\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\theta_2' - \psi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\varphi'\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\theta_1'.$$

On peut donc se demander quelles doivent être les limites θ_1 et θ_2 pour qu'une formule semblable à (64) puisse subsister, et l'on trouve pour conditions :

$$1^\circ \quad \theta_1\theta_2 = x + c;$$
$$2^\circ \quad F_2 + F_1' = 0,$$

ou :

$$\left.\begin{aligned} &\psi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\varphi'\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\theta_2' - \psi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\varphi'\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\theta_1' \\ &+ \left[\varphi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\psi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\theta_2' - \varphi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\psi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\theta_1'\right]' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (65).$$

Il existe donc, pour des formes données de φ et de ψ, une infinité de systèmes de limites, θ_1 et θ_2, qui permettent de prendre la différentielle seconde de l'intégrale

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)du,$$

au moyen de la règle donnée par M. Boussinesq pour le cas où les limites sont 0 et ∞. On pourrait obtenir tous ces systèmes de limites si l'on savait intégrer l'équation (65).

Mais, comme je ne suis parvenu précédemment, même avec les limites 0 et ∞, à aucune application dans laquelle on ne

Digitized by Google

pût supposer $\varphi(x) = \psi(x)$ (*), j'admettrai aussi cette hypothèse à partir de ce moment.

Alors l'équation (65) devient :

$$\varphi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\varphi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)(\theta_2' - \theta_1')' + (\theta_2' - \theta_1')D_x\left[\varphi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\varphi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\right] - \varphi\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\varphi'\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\theta_1' + \varphi\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\varphi'\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)\theta_2' = 0. \quad (66)$$

Si, au lieu de ne différentier que deux fois, on devait différentier $2p$ fois, on continuerait à opérer de la même manière ; mais, si la valeur de φ n'est pas donnée, il conviendra de la déterminer avant θ_1 et θ_2, ce qui va être éclairci par un exemple.

On pourra essayer d'appliquer la méthode que je viens d'esquisser à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} = yx^m.$$

J'ai fait remarquer, dans ma Note sur l'équation de Riccati, qu'il suffit en principe (c'est-à-dire abstraction faite de la complication des calculs) de savoir réduire l'équation

$$\frac{d^{2p}y}{dx^{2p}} = Ayx^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

à cette autre :

$$\frac{d^p z}{dx^p} = Bzx^{\frac{m}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

et j'ai donné une méthode pour opérer cette réduction (**).

(*) Je n'ai pas fait cette hypothèse dans la réduction de l'équation

$$\frac{d^{2p}y}{dx^{2p}} = yx^m,$$

mais j'aurais pu la faire, comme on va le voir immédiatement.

(**) Je saisis cette occasion pour signaler une faute d'impression dans la Note dont il s'agit :

Page 17 des *tirés à part* (232 du *Bulletin*, t. IX, 3e sér.), la limite inférieure du Σ doit être 0 et non 1.

Digitized by Google

Malheureusement, les intégrales que l'on y considère sont prises entre 0 et ∞, ce qui peut rendre dans certains cas les différentiations sous le signe illégitimes et les résultats illusoires.

En posant :

$$y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right) \varphi\left(\frac{u^2}{2}\right) du,$$

avec $\theta_1\theta_2 = x$, différentiant $2p$ fois et admettant que l'équation résultante analogue à (66) se vérifie, l'équation (67) deviendra :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\varphi^{(p)}\left(\frac{x^2}{2u^2}\right) \varphi^{(p)}\left(\frac{u^2}{2}\right) - Ax^m \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right) \varphi\left(\frac{u^2}{2}\right) \right] du = 0.$$

On pourra donc poser :

$$\varphi^{(p)}\left(\frac{x^2}{2u^2}\right) = A^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{x^2}{2u^2}\right)^{\frac{m}{2}} \varphi\left(\frac{x^2}{2u^2}\right)$$

$$\varphi^{(p)}\left(\frac{u^2}{2}\right) = A^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{u^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \varphi\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

et l'on sera réellement ramené à l'équation (68).

Celle-ci étant supposée résolue, on connaîtra donc la forme φ, et il restera à déterminer les limites θ_1 et θ_2, soit par la méthode précédemment indiquée, soit plutôt en reprenant tous les calculs avec la forme φ connue, et ne s'occupant plus que des termes complémentaires, en dehors de l'intégrale, termes dont l'ensemble devra s'annuler après la dernière différentiation.

Il n'arrivera pas toujours que la détermination des limites θ_1 et θ_2 puisse être conduite jusqu'au bout; aussi ne faut-il l'essayer que si la solution

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \infty$$

donne des résultats illusoires. Dans le cas particulier traité par M. Catalan (*), on trouve

$$\varphi(x) = x^k.$$

Le signe $\int$ disparaît donc dans la valeur de y, et il y a avantage à opérer directement, comme l'a fait ce savant analyste.

(*) *Bull. de l'Ac. roy de Belgique*, 3e sér., t. XII (1886), pp. 21 et 22.

Digitized by Google

Théorème de réduction. — Je placerai ici, comme digression, une autre remarque sur le Mémoire de M. Catalan, que je viens de citer.

L'auteur intègre l'équation

$$X^2z'' + kXX'z' - (XX'' + kX'^2)z = 0.$$

La transformée à deux termes de cette équation est :

$$\frac{u''}{u} = \alpha\frac{X''}{X} + \beta\frac{X'^2}{X^2},$$

avec

$$\alpha = 1 + \frac{k}{2}, \quad \beta = \frac{k}{2} + \frac{k^2}{4}.$$

Ces constantes satisfont donc à la relation

$$\beta = \alpha(\alpha - 1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69).$$

Si l'on savait intégrer

$$\frac{u''}{u} = \alpha\frac{X''}{X} + \beta\frac{X'^2}{X^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

avec deux valeurs de α et de β ne satisfaisant pas à la relation (69), on en déduirait l'intégration de toutes les équations linéaires du second ordre.

En effet, le second membre de (70) peut se mettre sous la forme

$$\lambda\left(\frac{\alpha}{\lambda}\frac{X''}{X} + \frac{\beta}{\lambda}\frac{X'^2}{X^2}\right).$$

En remplaçant X par e^{X_1}, on trouve :

$$\lambda\left[\frac{\alpha}{\lambda}X_1'' + \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\beta}{\lambda}\right)X_1'^2\right].$$

Digitized by Google

Posant :

$$\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\beta}{\lambda}=\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2,$$

d'où :

$$\lambda=\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta},$$

la quantité entre crochets devient immédiatement intégrable, et peut être identifiée avec toute quantité intégrable donnée; donc il en serait de même du produit de cette dernière quantité par λ, ce qui répondrait au premier théorème fondamental. Le résultat, comme on le voit, devient illusoire quand $\beta=\alpha(\alpha-1)$.

Je me suis occupé, jusqu'à présent, des conditions nécessaires pour que la double différentiation puisse s'effectuer, pour l'intégrale

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varphi\left(\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{\quad}\right)\psi\left(\frac{u^2}{2}\right)du,$$

comme si les limites étaient 0 et ∞. Je renoncerai maintenant à cette condition, qui déterminait θ_1 et θ_2, mais qui ne conduirait à rien pour l'application des trois théorèmes fondamentaux.

θ_1 et θ_2 redeviendront donc arbitraires, mais je supposerai $\varphi(t)=\psi(t)=e^{-t}$ (*).

L'intégrale à employer est donc

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2}-\frac{u^2}{2}}du, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

(*) Les limites n'étant plus infinies, on pourrait ici prendre e^t au lieu de e^{-t}; mais je me bornerai à rechercher les formules générales dont nous connaissons déjà des cas particuliers.

Digitized by Google

et les valeurs de F_1 et de F_2 deviennent :

$$F_1 = e^{\frac{-\theta_1^2-\theta_2^2}{2}}(\theta_2'-\theta_1') = e^{-\theta_1\theta_2}e^{\frac{-(\theta_2-\theta_1)^2}{2}}(\theta_2-\theta_1)'.$$
$$F_2 = -F_1.$$

Essayons d'appliquer successivement les trois théorèmes fondamentaux.

THÉORÈME I. — On donne l'intégrale de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x), \quad \ldots \quad (72)$$

trouver celle de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = kyF(x).$$

Adoptant pour y, dans la dernière équation, la valeur (71), et substituant, on trouve :

$$\left[-(\theta_1\theta_2)''+(\theta_1\theta_2')^2-F(x)\right]\int_{\theta_1}^{\theta_2} = (k-1)F(x)\int_{\theta_1}^{\theta_2}+(\theta_1\theta_2)'F_1-F_1'. \quad (73).$$

Si l'on veut, maintenant, annuler séparément les deux membres, la connaissance de l'intégrale de (72) permettra de déterminer le produit $\theta_1\theta_2$; le second membre donne une seconde équation (différentielle) entre θ_1, θ_2 et x, car $\int_{\theta_1}^{\theta_2}$ peut être considérée comme une fonction connue de θ_1 et de θ_2 (elle va, d'ailleurs, être déterminée); mais il n'y a guère d'espoir d'intégrer l'équation restante.

Je vais, toutefois, exposer ici une recherche qui pourrait, de même, trouver place lors de l'application des théorèmes II et III.

Soit $k = 1$. Alors les valeurs de θ_1 et de θ_2 déduites de (73) doivent nous faire retrouver l'intégrale connue de (72).

Digitized by Google

Remplaçons $\theta_1\theta_2$ par z. On aura, d'une part :

$$y = e^{-z};$$

d'autre part :

$$y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\frac{z^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2}} du,$$

les limites étant déterminées par :

$$z'F_1 - F_1' = 0,$$

dont l'intégrale est :

$$\Pi(\theta_2 - \theta_1) = c' + c\int e^{2\theta_1\theta_2} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

(j'appelle $\Pi(x)$ l'intégrale

$$\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} dx).$$

La seconde intégrale n'est pas nécessairement égale à la première. On doit avoir, seulement :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2}} du = Ae^{-\theta_1\theta_2} + Be^{-\theta_1\theta_2}\int e^{2\theta_1\theta_2} dx. \quad . \quad (75)$$

Le produit $\theta_1\theta_2$ est arbitraire, en ce sens qu'après l'avoir choisi, on peut déterminer $F(x)$ de manière que l'équation (72) ait pour solution $y = e^{-\theta_1\theta_2}$.

Admettons que $\theta_1\theta_2$ s'annule sous $x = x_1$. L'un des deux facteurs devra donc s'annuler et je supposerai que ce soit θ_1.

En faisant $x = x_1$ dans (74) et dans (75), on trouve :

$$\Pi(\theta_2) = c' + cx_1,$$
$$\Pi(\theta_2) = A + Bx_1;$$

d'où

$$c' + cx_1 = A + Bx_1.$$

Digitized by Google

Conservant les mêmes formes θ_1 et θ_2, nous appellerons x_2 une valeur de x qui annule $\theta_2 - \theta_1$.

En remplaçant x par x_2 dans (74) et (75), on trouvera :

$$0 = c' + c\int e^{z\theta_1\theta_2} dx,$$

$$0 = A + B\int e^{z\theta_1\theta_2} dx;$$

ou :

$$c' + c\int = A + B\int.$$

De la comparaison de cette dernière équation avec

$$c' + cx_1 = A + Bx_1.$$

il résulte que l'on a, séparément :

$$A = c'. \quad B = c;$$

et dès lors les équations (74) et (75) donnent :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2}} du = e^{-\theta_1\theta_2}\,\Pi(\theta_2 - \theta_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Bien que l'équation (76) ait été obtenue moyennant la condition (74), elle doit être indépendante de cette condition et se vérifier pour toute valeur de θ_1 et de θ_2, c'est-à-dire se réduire à une identité.

En effet, l'intégrale indiquée au premier membre est une fonction déterminée de θ_1 et de θ_2; si cette fonction, au lieu d'être identiquement égale au second membre, ne lui était équivalente que moyennant (74), cette dernière équation serait donc la résultante de l'intégrale véritable et de (76), ce qui est impossible, puisqu'aucune de ces deux dernières équations ne contient les constantes c' et c.

Comme application, on peut supposer :

$$\theta_1 = 0. \quad \theta_2 = \infty, \quad \theta_1\theta_2 = t.$$

L'équation (76) devient alors :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2}} du = e^{-t}\,\Pi(\infty) = e^{-t}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Digitized by Google

Mais on a :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (*).$$

Donc :

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-t},$$

ce qui est aussi une relation connue (**).

Ainsi, ce n'est pas seulement entre 0 et ∞ qu'on peut intégrer

$$e^{-\frac{t^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2}} du,$$

mais bien entre deux limites quelconques, pourvu que leur produit soit égal à t (***). *Intégrer* signifie ici ramener à l'intégrale, plus simple, de

$$e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Par la relation que l'on vient de trouver, l'équation restant à résoudre pour l'application complète du théorème I serait

$$(k-1)\,F(x)e^{-\theta_1\theta_2\Pi(\theta_2-\theta_1)} = -(\theta_1\theta_2)'F_1 + F_1',$$

F_1 ayant la valeur indiquée à la page 67.

THÉORÈME II. — On donne l'intégrale de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x);$$

(*) Cette équation doit remplacer celle qui est comprise entre (20) et (21) dans ma Note sur l'équation de Riccati, et qui est erronée. Je signalerai, en même temps, une autre erreur dans cette Note : Au § I^er^, dans le tableau des transformations, ligne 7, 3^e^ colonne, au lieu de $-\frac{1}{px-y}$, il faut $\frac{1}{px-y}$.

(**) Note sur l'équation de Riccati, équation (21).

(***) L'intégrale entre 0 et ∞ est donnée dans les *Nouvelles Tables d'intégrales définies* de M. Bierens de Haan, Leide, 1867 ; Table 26.

Digitized by Google

trouver celle de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,[F(x) + k].$$

Opérant de la même manière que ci-dessus, on trouvera pour équation résultante :

$$[-(\theta_1\theta_2)'' + (\theta_1\theta_2)'^2 - F(x)]\int_{\theta_1}^{\theta_2} = k\int_{\theta_1}^{\theta_2} + (\theta_1\theta_2)'\,F_1 - F_1'.$$

La condition obtenue en annulant séparément les deux membres différera de celle du théorème I en ce que la constante $k - 1$ sera remplacée par k, et le facteur $F(x)$ sera supprimé.

THÉORÈME III. — On donne l'intégrale de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x) + k; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

trouver celle de

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

Considérons, cette fois, $\int_{\theta_1}^{\theta_2}$ comme représentant l'intégrale de (77), et substituons dans cette équation et non dans (78).

Il viendra, comme précédemment :

$$[-(\theta_1\theta_2)'' + (\theta_1\theta_2)'^2 - F(x)]\int_{\theta_1}^{\theta_2} = k + (\theta_1\theta_2)'F_1 - F_1'.$$

On connaît une relation entre θ_1 et θ_2 par l'équation (77); établissons-en une seconde par :

$$k + (\theta_1\theta_2)'F_1 - F_1' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Digitized by Google

Alors le premier membre devra s'annuler aussi, ce qui conduira à l'intégration d'une équation équivalente à (78).

L'équation (79), plus simple encore que celle du théorème II, s'intègre complètement comme il suit :

$$\Pi(\theta_2 - \theta_1) = c' + \int e^{\theta_1\theta_2}\left[c + k\int e^{-\theta_1\theta_2}dx\right]; \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

mais, cette fois, il ne suffit plus de savoir obtenir cette intégrale pour déterminer θ_1 et θ_2, parce que le produit $\theta_1\theta_2$ n'est plus connu : il faut combiner (80) avec la relation

$$e^{-\theta_1\theta_2}\Pi(\theta_2 - \theta_1) = y,$$

où y est donnée.

§ VI.

Équations aux dérivées partielles.

En thèse générale, l'intégration des équations aux dérivées partielles est plus compliquée que celle des équations ordinaires. Il peut arriver cependant, comme nous le verrons, que l'introduction d'équations aux dérivées partielles facilite les recherches relatives à l'intégration de certaines équations ordinaires, notamment des équations linéaires du second ordre.

a. Le premier moyen qui se présente, dans cet ordre d'idées, consiste à remplacer l'équation linéaire en question par l'équation non linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \varphi(x),$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) - y^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Digitized by Google

puis à remplacer $\frac{dy}{dx}$ par

$$-\frac{\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\frac{\partial\theta}{\partial y}},$$

$\theta(x, y) = c$ représentant l'intégrale générale de (81). On a donc alors à résoudre l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial y}[y^2 - \varphi(x)]. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Mais il n'y a pas lieu de s'arrêter à ce procédé, car on ne connaît aucun moyen d'intégrer l'équation (82), sans recourir à (81).

b. J'invoquerai maintenant la propriété démontrée dans le § IV (page 52) et d'après laquelle l'intégration des équations linéaires du second ordre se ramène à savoir passer de

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

à

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\varphi(x, y).$$

Si l'on pose :

$$\frac{\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\frac{\partial\theta}{\partial y}} = -\varphi(x, y),$$

$$\frac{\frac{\partial\theta_1}{\partial x}}{\frac{\partial\theta_1}{\partial y}} = -\alpha\varphi(x, y),$$

θ sera connu, et θ_1 sera l'inconnue de la question. L'équation aux dérivées partielles restant à résoudre est donc :

$$\frac{\frac{\partial\theta_1}{\partial x}}{\frac{\partial\theta_1}{\partial y}} = \alpha\frac{\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\frac{\partial\theta}{\partial y}},$$

Digitized by Google

θ étant une fonction quelconque donnée, α une constante déterminée, et θ_1 la fonction inconnue.

c. Une troisième méthode d'application des équations aux dérivées partielles a été présentée dans un billet cacheté accepté par l'Académie le 5 décembre 1885 (*).

d. Mais la seule méthode à laquelle je compte donner ici quelques développements est la suivante :

Considérons l'équation

$$y' + y\theta = \theta_1, \quad \ldots \quad (83)$$

où θ et θ_1 peuvent être des fonctions de x, y, y', y'', ...

Elle donne :

$$y = e^{-\int \theta dx}\left[c + \int \theta_1 e^{\int \theta dx} dx\right]. \quad \ldots \quad (84)$$

Cherchons quelle doit être la composition des fonctions θ et θ_1 pour que les intégrations soient possibles, et qu'il ne reste à faire que de véritables quadratures, comme cela arrive, évidemment, quand θ et θ_1 sont de simples fonctions de x.

Il faut d'abord que l'on puisse écrire :

$$\int \theta dx = \varphi(x, y, y', y'', \ldots),$$

d'où :

$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' + \cdots$$

Ensuite, on doit avoir :

$$\int \theta_1 e^{\int \theta dx} = \psi(x, y, y', y'', \ldots),$$

$$\theta_1 e^{\int \theta dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y'} y'' + \cdots,$$

$$\theta_1 = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \psi}{\partial y'} y'' + \cdots}{e^{\int \theta dx}} = e^{-\int \theta dx}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y'} y'' + \cdots\right).$$

(*) Voir l'Appendice.

Digitized by Google

Les deux fonctions φ et ψ peuvent être choisies au hasard, si l'on veut simplement ramener les intégrations indiquées dans (84) à de véritables quadratures. Mais si l'on veut, de plus, que l'équation résultante soit intégrable, il faut d'autres conditions. Nous imposerons à l'équation (84) la condition de ne plus contenir que deux variables : soit x et y, ou bien x et y', ou enfin y et y', et, pour simplifier encore, nous supposerons $c = 0$.

PREMIER CAS. x et y. La fonction qui doit être à deux variables seulement est la suivante :

$$\frac{\psi(x, y, y', y'', \ldots)}{e^{\varphi(x, y, y', y'', \ldots)}}.$$

On doit donc avoir :

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots) = \psi_1(x, y)\chi(x, y, y', y'', \ldots),$$
$$e^{\varphi(x, y, y', y'', \ldots)} = \psi_2(x, y)\chi(x, y, y', y'', \ldots),$$

d'où :

$$\theta = \frac{\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\chi + \psi_2\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\chi y' + \psi_2\frac{\partial \chi}{\partial y}y' + \psi_2\left(\frac{\partial \chi}{\partial y'}y'' + \frac{\partial \chi}{\partial y''}y''' + \cdots\right)}{\psi_2\chi},$$

$$\theta_1 = \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\chi + \psi_1\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\chi y' + \psi_1\frac{\partial \chi}{\partial y}y' + \psi_1\left(\frac{\partial \chi}{\partial y'}y'' + \frac{\partial \chi}{\partial y''}y''' + \cdots\right)}{\psi_2\chi}.$$

SECOND CAS. x et y'. Alors la fonction qui ne doit renfermer que deux variables est $\frac{\psi}{ye^{\varphi}}$, et l'on doit avoir :

$$\psi = \psi_1(x, y')\chi,$$
$$e^{\varphi} = y^{-1}\psi_2(x, y')\chi,$$

Digitized by Google

d'où :

$$\theta=\frac{\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\chi+\psi_2\frac{\partial\chi}{\partial x}-y^{-1}\psi_2\chi y'+\psi_2\frac{\partial\chi}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi_2}{\partial y'}\chi y''+\psi_2\frac{\partial\chi}{\partial y'}y''+\psi_2\left(\frac{\partial\chi}{\partial y''}y'''+\cdots\right)}{\psi_2\chi},$$

$$\theta_1=\frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\chi y+\psi_1\frac{\partial\chi}{\partial x}y+\psi_1\frac{\partial\chi}{\partial y}y'y+\frac{\partial\psi_1}{\partial y'}y''\chi y+\psi_1\frac{\partial\chi}{\partial y'}y''y+\psi_1 y\left(\frac{\partial\chi}{\partial y''}y'''+\cdots\right)}{\psi_2\chi}.$$

TROISIÈME CAS. y et y'. On a :

$$\psi=\psi_1(y,y')\chi,$$
$$e^{\varphi}=\psi_2(y,y')\chi.$$

$$\theta=\frac{\psi_2\frac{\partial\chi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\chi y'+\psi_2\frac{\partial\chi}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi_2}{\partial y'}\chi y''+\psi_2\frac{\partial\chi}{\partial y'}y''+\psi_2\left(\frac{\partial\chi}{\partial y''}y'''+\cdots\right)}{\psi_2\chi},$$

$$\theta_1=\frac{\psi_1\frac{\partial\chi}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\chi y'+\psi_1\frac{\partial\chi}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi_1}{\partial y'}\chi y''+\psi_1\frac{\partial\chi}{\partial y'}y''+\psi_1\left(\frac{\partial\chi}{\partial y''}y'''+\cdots\right)}{\psi_2\chi}.$$

Si l'on veut obtenir des équations du premier ordre, on règlera les variables $(x,\ y,\ y')$, pouvant être contenues dans ψ_1, ψ_2 et χ, de manière à supprimer tous les termes en y'', ou bien seulement à supprimer les termes d'ordre supérieur à y'', mais dans ce dernier cas il y aura une équation de condition pour annuler la somme des termes en y''.

De même, si l'on veut obtenir des équations du second ordre, on règlera les variables $(x,\ y,\ y',\ y'')$ pouvant être contenues dans ψ_1, ψ_2 et χ, de manière à supprimer tous les termes en y''', ou seulement à supprimer les termes d'ordre supérieur à y''', et dans ce dernier cas il y aura une équation de condition pour annuler la somme des termes en y'''.

Appliquant ces quatre méthodes à chacun des trois cas ci-dessus, on obtiendra douze équations générales intégrables, et ayant toutes pour intégrale

$$y=\frac{\psi}{e^{\varphi}},$$

Digitized by Google

ou encore :

$$y = \frac{\psi_1}{\psi_2},$$

dans le premier et le troisième cas, ou simplement $\psi_1 = \psi_2$, dans le second cas.

Il restera maintenant à assimiler l'une de ces douze équations à celle qui est à résoudre, ce qui donnera lieu à des équations entre les dérivées partielles de ψ_1, ψ_2 et χ.

Si, au contraire, on se donnait ces fonctions, on trouverait une infinité d'équations intégrables.

Je ne m'y arrêterai pas, mais je tiens à prouver, par un exemple, que cette théorie de l'assimilation de certaines équations aux équations linéaires du premier ordre n'est pas tout à fait stérile.

Généralisation d'une équation d'Abel (*). — Dans une lettre que M. Catalan m'a fait l'honneur de m'écrire, le 8 juillet dernier, mon savant confrère me pose la question suivante : « Dans vos recherches, avez-vous considéré l'équation d'Abel (?) intégrée par Mansion? (*N. C. M.*, tome VI) ».

Je ne m'étais jamais occupé de cette équation, qui n'est pas linéaire, mais je l'ai étudiée depuis, et je présenterai deux remarques à ce sujet.

L'article de M. Mansion peut se résumer ainsi :

« Si, dans l'équation

$$y'' + (k+l)y' + kly = Ay^{-1+\frac{2l}{k}}, \quad \ldots\ldots \quad (85)$$

on pose :

$$y' + ky = z, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

il vient :

$$z' + lz = Ay^{-1+\frac{2l}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

(*) Ou de M. Holmboë (*N. C. M.*, t. VI, p. 459).

Digitized by Google

Soit :

$$y = ue^{-kx},$$
$$z = ve^{-lx}.$$

Les équations (86) et (87) se transforment en deux autres, qui, convenablement multipliées membre à membre, permettent de séparer les variables u et v. Le reste est facile ».

Voici maintenant mes deux remarques :

D'abord, les calculs se présentent de la même manière si, au lieu de l'équation (85), on prend :

$$y'' + (k+l)y' + kly = y^{-1+\frac{2l}{k}}\varphi(ye^{kx});$$

φ représentant une fonction quelconque.

L'équation (85) répond à $\varphi = A$.

Mais ensuite, on peut opérer autrement et d'une manière plus simple et peut-être plus naturelle.

Après avoir posé, comme M. Mansion, $y = te^{-kx}$, ce qui donne :

$$t'' - (k-l)t' = e^{2(k-l)x}\varphi(t)t^{-1+\frac{2l}{k}},$$

multiplions les deux membres par t', et faisons $t'^2 = s$; il viendra :

$$s' - 2(k-l)s = 2e^{2(k-l)x}\varphi(t)t^{-1+\frac{2l}{k}}t'.$$

Intégrant à la manière des équations linéaires du premier ordre, on trouve :

$$s = e^{2(k-l)x}\left[c + 2\int\varphi(t)t^{-1+\frac{2l}{k}}t'dx\right] =$$
$$e^{2(k-l)x}\left[c + 2\int\varphi(t)t^{-1+\frac{2l}{k}}dt\right];$$
$$\frac{t'^2}{c + 2\int\varphi(t)t^{-1+\frac{2l}{k}}dt} = e^{2(k-l)x};$$
$$e^{(k-l)x} = \frac{t'}{\sqrt{c + 2\int\varphi(t)t^{-1+\frac{2l}{k}}dt}};$$

Digitized by Google

et enfin :

$$e^{(k-l)x} = (k-l)\left[\int \frac{dt}{\sqrt{c + 2\int \varphi(t) t^{-1+\frac{2l}{k}} dt}} + c'\right].$$

Pour avoir l'intégrale en y et en x, on remplacera t, après l'intégration, par ye^{kx}.

Appliquons à l'équation primitive d'Abel :

$$y'' + 3y' + 2y = 2y^3;$$

c'est-à-dire qu'il faut faire $l = 2$, $k = 1$, $\varphi = 2$.

L'intégrale sera :

$$e^{-x} = -\left(c' + \int \frac{dt}{\sqrt{c + 4\int t^3 dt}}\right) = -c' - \int \frac{dt}{\sqrt{c + t^4}}.$$

La solution coïncide donc, pour ce cas particulier, avec celle de M. Mansion.

Digitized by Google

RÉCAPITULATION

SOUS LA FORME PRÉCÉDEMMENT INDIQUÉE (*).

A. *Théorèmes de réduction.*

a. Tableau de formes $F(x)$ telles que si l'on pouvait intégrer, pour l'une d'entre elles, l'équation $y'' = yF(x)$, on pourrait le faire aussi pour une forme quelconque de F :

$$k\frac{\psi''(x)}{\psi(x)}.$$

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + k, \quad \text{ou} \quad \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + \chi(x),$$

(ψ quelconque, χ déterminé).

$$f' + \frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + \psi^{-2}(x).$$

$$\frac{D^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}} + \varphi(f, f', f'', \ldots)$$

φ ayant l'une des formes données à la page 28.

(*) Note sur l'équation de Riccati, pp. 2 et 3 (217 et 218 du *Bulletin*, 3e sér., t. IX).

Mémoire actuel, pp. 4 à 6.

Il est bien entendu que cette récapitulation ne comprend pas, à beaucoup près, tous les théorèmes de réduction ou d'équivalence que l'on peut déduire du texte de ce Mémoire. Ce sont plutôt des exemples de théorèmes semblables, simplifiés autant que possible. En cas de doute sur leur signification exacte, il faut recourir au texte.

On peut observer encore que l'assimilation établie, d'une part entre les théorèmes d'équivalence et les formes intégrables, d'autre part entre les théorèmes de réduction et les formes qui devraient être intégrables, n'est rigoureusement exacte que pour les premiers exemples de chaque groupe.

Digitized by Google

$\alpha\psi^{-3}\psi'^2 + \beta\psi^{-1}\psi''$, α n'étant pas égal à $\beta(\beta - 1)$.

b. Équations du premier ordre :

$y' = \alpha\psi(x, y)$, étant donnée l'intégrale de $y' = \psi(x, y)$.

$$\frac{u'}{(u+x)^2} + \frac{v'}{(v+x)^2} = 0,$$

l'une des formes u, v, étant donnée et l'autre inconnue.

c. Équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\frac{\partial\theta_1}{\partial x}}{\frac{\partial\theta_1}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial\theta}{\partial x}}{\frac{\partial\theta}{\partial y}}$$

θ étant donnée et θ_1 inconnue.

B. *Théorèmes d'équivalence, ou tableau de formes* F(x) *qui rendent intégrable l'équation* $y'' = yF(x)$.

$$x^{-4}\frac{\varphi''(x^{-1})}{\varphi(x^{-1})},$$

$$D_x\left[\text{inv.}\int\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}dx\right],$$

$$\psi'(x), \quad \varphi'_1(x), \quad \varphi'_2(x)\cdots$$

{pourvu que l'une de ces quantités réponde à la condition indiquée, et que $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ soient les diverses solutions de $\psi[\varphi(x)] = x$}.

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{D^2_x \text{ inv.}\int z^2dx}{D_x \text{ inv.}\int z^2dx}\right]^2,$$

(pourvu que $-\frac{z''}{z}$ satisfasse lui-même à la condition indiquée).

Plus loin, on s'est mis d'accord plutôt avec le titre du tableau qu'avec l'espèce du théorème. Ainsi la formule

$$F(f) = \frac{t'}{f'\int f't dx}$$

a été considérée comme théorème d'équivalence, parce qu'elle donne des formes intégrables. Dans le texte, au contraire, on l'a considérée comme théorème de réduction (p. 21), parce que l'intégration des équations linéaires du second ordre *se réduit* à savoir trouver la forme *f* qui réponde à la formule précitée pour une forme donnée F.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY
Digitized by Google

$F(x)$, quand on a :

$$F(f)=\frac{t'}{f'\int f't\,dx},$$

ou, plus généralement,

$$F(f)=\frac{t'+D(f'-{}^tg')}{f'\left(g+\int f't\,dx\right)}.$$

$F'(x)$, quand on a :

$$F\left(\int\frac{z'}{t}dx\right)=\int\frac{t'}{z}dx.$$

$$\frac{s't'}{st}+\frac{D^2\left[\left(\frac{s'}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left(\frac{s'}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}},$$

ou :

$$\frac{s't'}{st}+\frac{D^2\left[\left(\frac{t'}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left(\frac{t'}{s}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

$F(x)$, quand on a :

$$F\left(\frac{\theta'^2}{2}\right)=-\frac{\theta'''}{\theta\theta'\theta''^2}.$$

$$-\frac{CI}{K}-\frac{I''}{4I}-\frac{K'I'}{8KI}+\frac{5I'^2}{16I^2}-\frac{3K'^2}{16K^2}+\frac{K''}{4K}.$$

C. *Résultats étrangers à la théorie des équations linéaires et obtenus accessoirement.*

Formules de transformation des intégrales elliptiques (pages 36 à 38).

Intégration de $e^{-\frac{t^2}{2u^2}-\frac{u^2}{2}}du$, entre deux limites quelconques, pourvu que leur produit soit égal à k (page 68).

Équations qui peuvent se résoudre comme les équations linéaires du premier ordre. — Généralisation d'une équation d'Abel ou de M. Holmboë (pages 72 à 77).

Digitized by Google

APPENDICE.

REPRODUCTION TEXTUELLE DU CONTENU DE TROIS BILLETS CACHETÉS DÉPOSÉS RESPECTIVEMENT LE 1er AVRIL 1882, LE 5 AOÛT 1882 ET LE 5 DÉCEMBRE 1885, ACCEPTÉS PAR L'ACADÉMIE, ET OUVERTS EN SÉANCE DU 8 JANVIER 1887.

Sur la théorie de l'intégration des équations linéaires du second ordre. — Sa réduction à trois problèmes, par J. De Tilly, membre de l'Académie (1er avril 1882).

Considérons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = yF(x). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

à laquelle se ramènent, comme on le sait, toutes les équations différentielles linéaires du second ordre, et remplaçons x et y en fonction de deux autres variables : u (indépendante), v (dépendante), de manière que l'équation résultante reste linéaire.

On trouve aisément que la transformation la plus générale, parmi toutes celles qui amènent ce résultat, équivaut à la suivante :

$$x = f(u), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$y = vf'(u)^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$f(u)$ représentant une fonction jusqu'ici arbitraire.

Digitized by Google

Moyennant ces substitutions, l'équation (1) deviendra, toutes réductions faites :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{f'(u)^2\mathrm{F}[f(u)] + \frac{3}{4}f'(u)^{-2}f''(u)^2 - \frac{1}{2}f'(u)^{-1}f'''(u)\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Si, pour une forme quelconque de la fonction f, on savait intégrer l'équation (4), on obtiendrait l'intégrale de (1) par l'élimination de u et de v entre (2), (3), et l'intégrale de (4), et le problème général serait résolu. Tout revient donc à trouver une forme f qui rende l'équation (4) intégrable.

Premier essai de détermination de la forme f. — On ne peut annuler la somme des trois termes compris dans la parenthèse, car on aurait ainsi une équation différentielle (en f) plus difficile à résoudre que l'équation donnée.

Il en serait de même en annulant la somme du premier et du troisième terme.

Annulons la somme des deux derniers :

$$\frac{3}{4}f'(u)^{-2}f''(u)^2 = \frac{1}{2}f'(u)^{-1}f'''(u).$$

On trouve alors :

$$f(u) = a + (bu + c)^{-1}$$

et :

$$\frac{d^2v}{du^2} = vb^2(bu + c)^{-4}\mathrm{F}\left[a + (bu + c)^{-1}\right],$$

transformation qui, en général, ne peut conduire à un résultat utile.

Si, enfin, on annule la somme des deux premiers termes, on a plus de succès.

Il vient :

$$f'(u)^2\mathrm{F}[f(u)] + \frac{3}{4}f'(u)^{-2}f''(u)^2 = 0,$$

Digitized by Google

d'où l'on déduit :

$$F^{\frac{1}{2}}[f(u)]f'(u) = \pm\sqrt{-\frac{3}{4}}f'(u)^{-1}f''(u),$$

équation dont chaque membre s'intègre par une quadrature.

Cette intégrale première, ne renfermant que $f'(u)$ et $f(u)$, mais non la variable indépendante u, s'intègre encore, et on obtient la valeur de f.

Alors l'équation (4) se réduit à

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[-\frac{1}{2}f'(u)^{-1}f'''(u)\right]$$

Or, si l'on avait simplement :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v[f'(u)^{-1}f'''(u)],$$

l'intégrale générale serait

$$v = af'(u) + bf'(u)\int f'(u)^{-2}du.$$

Tout dépend donc du facteur $-\frac{1}{2}$ et l'on a ce théorème :

L'intégration des équations linéaires du second ordre se réduit à savoir passer de l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\chi(u),$$

supposée intégrable, à l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{1}{2}v\chi(u),$$

et à intégrer cette dernière, qui ne diffère de la première que par le coefficient $-\frac{1}{2}$.

La forme χ doit pouvoir être quelconque.

Digitized by Google

Second essai de détermination de la forme f. — Supposons qu'au lieu de l'équation (4), nous ayons trouvé :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{f'(u)^2 F[f(u)] + \frac{3}{4}f'(u)^{-2}f''(u)^2 - \frac{1}{2}f'(u)^{-1}f'''(u) + U\right\}, \quad (5)$$

U représentant une fonction de u qui peut se réduire à une constante.

Posant :

$$f'(u)^2 F[f(u)] + U = f'(u)^2,$$

on aura une équation intégrable, car elle peut s'écrire

$$\sqrt{1 - F[f(u)]}\, f'(u) = \pm U^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

et chaque membre s'intègre encore par une quadrature.

On déterminera donc la forme de f, et pour cette forme spéciale, l'équation (5) se réduira à :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{f'(u)^2 + \frac{3}{4}f'(u)^{-2}f''(u)^2 - \frac{1}{2}f'(u)^{-1}f''(u)\right\};$$

elle aura donc pour intégrale générale :

$$v = f'(u)^{-\frac{1}{2}}\left[ae^{f(u)} + be^{-f(u)}\right].$$

Mais il resterait à passer de (5) à (4).

De là résulte ce nouveau théorème :

L'intégration des équations linéaires du second ordre se réduit à savoir passer de l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[\theta(u) + U\right],$$

Digitized by Google

supposée intégrable, à l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\theta(u),$$

et à intégrer cette dernière, qui ne diffère de la première que par la suppression du terme U. Il suffit d'ailleurs, comme on vient de le voir, que cette question puisse être résolue pour une valeur unique, absolument arbitraire, de U, même une constante déterminée.

La seule valeur qu'on ne puisse pas donner à U, c'est zéro, parce qu'alors l'équation (6) conduirait à des résultats illusoires. Quant à la forme θ, elle doit rester quelconque.

Troisième essai de détermination de la forme f. — Supposons enfin qu'au lieu de l'équation (4) nous ayons trouvé :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{f'(u)F[f(u)] + \frac{3}{4}f'(u)^{-2}f''(u)^2 - \frac{1}{2}f'(u)^{-1}f'''(u)\right\} + U. \quad (7)$$

U représentant encore une fonction de u, pouvant se réduire à une constante.

Posons :

$$U = f'(u)^{\frac{5}{2}}[ae^{f(u)} + be^{-f(u)}]\{1 - F[f(u)]\},$$

équation qui, pouvant se mettre sous la forme

$$\{F[f(u)] - 1\}^{\frac{2}{3}}[ae^{f(u)} + be^{-f(u)}]^{\frac{2}{3}}f'(u) = (-U)^{\frac{2}{3}},$$

permet encore de déterminer la forme f par deux quadratures.

Alors l'équation (7) devient :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{\begin{array}{l} f'(u)^2F[f(u)] + \frac{3}{4}f'(u)^{-2}f''(u)^2 - \frac{1}{2}f'(u)^{-1}f'''(u) \\ + f(u)^{\frac{5}{2}}[ae^{f(u)} + be^{-f(u)}]\{1 - F[f(u)]\} \end{array}\right\}. \quad (8)$$

Digitized by Google

et elle a, de nouveau, pour intégrale (particulière, cette fois) :

$$v = f'(u)^{-\frac{1}{2}}[ae^{f(u)} + be^{-f(u)}].$$

Mais il resterait à passer de (7) à (4), ce qui revient à trouver une seconde intégrale particulière de (7), distincte de la première.

Nous en déduisons ce dernier théorème :

L'intégration des équations linéaires du second ordre se réduit à savoir passer de l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\theta(u) + U,$$

supposée partiellement intégrable (on n'en connaît, par hypothèse, qu'une solution particulière), à l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\theta(u)$$

et à intégrer cette dernière, qui ne diffère de la première que par la suppression du terme U.

Ce terme peut être choisi arbitrairement, et même rendu égal à une constante, mais non annulé, pour les mêmes raisons qu'au second théorème.

La forme θ doit rester quelconque.

Deux théorèmes nouveaux et plus généraux que les précédents (1er août 1882).

Le billet cacheté que j'ai déposé dans la séance du 1er avril dernier contient la démonstration de ces deux théorèmes :

I. On saurait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait résoudre le problème suivant :

On donne l'intégrale de $y^{-1}y'' = X$; trouver celle de $y^{-1}y'' = kX$

Digitized by Google

(la solution doit s'appliquer à une fonction X, quelconque, de la variable indépendante x et à la valeur $k = -\frac{1}{2}$).

II. On saurait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait résoudre le problème suivant :

On donne l'intégrale de $y^{-1}y'' = X$; trouver celle de $y^{-1}y'' = X + U$ (la solution doit s'appliquer encore à une fonction X quelconque, mais il suffit de savoir résoudre le problème pour une seule forme arbitraire de U (fonction de x), même une constante.

Je vais démontrer maintenant deux autres théorèmes (dont les deux précédents sont respectivement des cas particuliers), ramenant la même théorie de l'intégration des équations linéaires du second ordre à deux autres problèmes, que l'on doit considérer comme plus simples que les précédents, puisque dans le premier la donnée est la même, avec une demande moins étendue, tandis que dans le second la demande est la même, avec des données plus étendues.

I. On saurait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait résoudre le problème suivant :

On donne l'intégrale de $y^{-1}y'' = X$; trouver celle de $y^{-1}y'' = \alpha X$ (mais cette fois il suffit de savoir résoudre pour une seule valeur arbitraire de α, différente de zéro).

II. On saurait intégrer toutes les équations linéaires du second ordre, si l'on savait résoudre le problème suivant :

On donne l'intégrale de $y^{-1}y'' = X$, et celle de $y^{-1}y'' = X + \beta U$; trouver celle de $y^{-1}y'' = X + U$ (X, fonction quelconque; mais il suffit, encore une fois, de savoir résoudre pour une forme unique et arbitraire de U, fonction de x ou constante, et pour une valeur unique et arbitraire de la constante β).

Digitized by Google

Démonstration du premier théorème. — L'équation $z'' = zF(x)$ se transforme, comme on le sait, en celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2v}{du^2} &= v\left\{f'(u)^2F[f(u)] + \frac{5}{4}[f'(u)]^{-2}[f''(u)]^2 - \frac{1}{2}[f'(u)]^{-1}f'''(u)\right\}\\ &= v\left\{[f'(u)]^2F[f(u)] + \gamma[f'(u)]^{-2}[f''(u)]^2 + \left(\frac{5}{4}-\gamma\right)[f'(u)]^{-2}[f''(u)]^2\right.\\ &\left. - \frac{1}{2}[f'(u)]^{-1}f'''(u)\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Posons :

$$\varepsilon = [f'(u)]^k;$$

On aura :

$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2\varepsilon}{du^2} = k(k-1)[f'(u)]^{-2}[f''(u)]^2 + k[f'(u)]^{-1}f'''(u).$$

En prenant

$$k = 2\gamma - \frac{1}{2},$$

l'équation (*a*) pourra s'écrire :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{[f'(u)]^2F[f(u)] + \left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)[f'(u)]^{-2}[f''(u)]^2 - \frac{1}{2k}\varepsilon^{-1}\frac{d^2\varepsilon}{du^2}\right\}.$$

$f(u)$ est encore arbitraire. Déterminons-le par l'équation

$$[f'(u)]^2F[f(u)] + \left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)[f'(u)]^{-2}[f''(u)]^2 = 0,$$

ou :

$$f'(u)F^{\frac{1}{2}}[f(u)] = \sqrt{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}\,[f'(u)]^{-1}f''(u).$$

Cette équation s'intègre une première fois par deux quadratures, et la résultante, ne renfermant que $f(u)$ et $f'(u)$, mais non la variable indépendante u, est encore intégrable.

Digitized by Google

Pour cette forme particulière de la fonction f, il reste à intégrer

$$v^{-1}\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{1}{2k}\varepsilon^{-1}\frac{d^2\varepsilon}{du^2}.$$

Or, si l'on avait simplement :

$$v^{-1}\frac{d^2v}{du^2} = \varepsilon^{-1}\frac{d\varepsilon}{du^2},$$

on intégrerait complètement par l'intermédiaire de l'intégrale particulière $v = \varepsilon$.

Il suffit donc de savoir passer de cette équation à une autre où le second membre est multiplié par $-\frac{1}{2k}$, ou, puisque k est arbitraire, il suffit de savoir résoudre le premier problème, pour intégrer l'équation linéaire quelconque du second ordre qui était donnée.

Passons maintenant au second théorème.

L'équation

$$z^{-1}z'' = \mathrm{F}(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

se transforme en

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{[f'(u)]^2\mathrm{F}[f(u)] + \frac{3}{4}[f'(u)]^{-2}[f''(u)]^2 - \frac{1}{2}[f'(u)]^{-1}f'''(u)\right\},$$

ou :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{[f'(u)]^2\mathrm{F}[f(u)] + \frac{\mathrm{D}^2[f'(u)]^{-\frac{1}{2}}}{f'(u)^{-\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Si donc on sait intégrer (b), on saura aussi intégrer les deux équations

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\,\frac{\mathrm{D}^2\left[f'(u)^{-\frac{1}{2}}\right]}{[f'(u)]^{-\frac{1}{2}}}$$

Digitized by Google

et

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left\{ [f'(u)]^2 F[f(u)] + \frac{D^2\left[f'(u)^{-\frac{1}{2}}\right]}{[f'(u)]^{-\frac{1}{2}}} \right\}.$$

Admettons maintenant que le second problème soit résolu, et posons :

$$\frac{D^2\left[f'(u)^{-\frac{1}{2}}\right]}{[f'(u)]^{-\frac{1}{2}}} = X,$$

$$f'(u)^2 F(fu) = \beta U,$$

équations dont la seconde, facilement intégrable, détermine f au moyen de la fonction U et de la constante β choisies arbitrairement, tandis que la première détermine X, qui doit pouvoir prendre une forme quelconque, d'après l'énoncé.

Il en résulte qu'on saura aussi intégrer

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[\frac{[f'(u)]^2 F[f(u)]}{\beta} + \frac{D^2\left[f'(u)^{-\frac{1}{2}}\right]}{[f'(u)]^{-\frac{1}{2}}} \right].$$

Mais c'est précisément l'équation à laquelle on serait parvenu si l'on avait eu à intégrer

$$z^{-1}z'' = \frac{F(x)}{\beta},$$

et si l'on avait adopté la même valeur de f que dans la transformation précédente.

Donc l'intégration de $z^{-1}z'' = F(x)$, entraîne celle de $z^{-1}z'' = \frac{1}{\beta}F(x)$, pour une certaine valeur de β, ce qui résout le premier problème, et suffit à établir toute la théorie, en vertu de ce qui précède.

Digitized by Google

Note sur la possibilité de réduire l'étude de toutes les équations linéaires du second ordre à l'étude d'une seule équation aux dérivées partielles (5 décembre 1885).

Dans deux Notes antérieures (*), j'ai démontré, parmi plusieurs autres propriétés, celle que l'on peut énoncer ainsi :

« L'intégration de toutes les équations linéaires du second ordre se ramène à savoir résoudre le problème suivant :

On donne l'intégrale de

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = X + a \text{ (**)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

pour deux valeurs particulières, a_1 et a_2, de a; trouver l'intégrale de cette même équation pour a quelconque (***). »

Considérons z comme une fonction de x et de a (ou y), de manière que l'équation donnée (1) sera remplacée par une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = X + y; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ou, si l'on différentie par rapport à y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Supposons que l'on puisse découvrir l'intégrale générale de l'unique équation (3), laquelle ne contient plus de trace de la fonction spéciale X qui entrait dans (1).

(*) Billets cachetés acceptés respectivement, par l'Académie, dans ses séances du 1er avril et du 5 août 1882.

(**) X représente une fonction quelconque de x.

(***) Ou seulement pour une troisième valeur particulière de a; mais je ne pense pas que ce soit plus facile.

Pour éviter le recours aux deux Notes antérieures, je reproduis plus loin la démonstration directe du théorème que je viens d'invoquer.

Digitized by Google

En remplaçant, dans cette intégrale, y par a, j'aurai une formule contenant comme cas particuliers (pour certaines formes des fonctions arbitraires qui y entrent) toutes les intégrales de (1).

Pour déterminer les fonctions arbitraires, qui sont au nombre de deux au plus, je remplacerai a successivement par a_1 et par a_2 et comme, pour ces deux valeurs, les intégrales de (1) sont connues, on aura deux équations entre les deux fonctions arbitraires.

Mais il faudrait connaître exactement la forme de l'intégrale pour décider si ces deux équations permettront de déterminer les fonctions par des opérations élémentaires.

Dans l'affirmative, l'intégration de *toutes* les équations linéaires du second ordre serait réellement ramenée à la résolution complète d'une seule équation du second ordre aux dérivées partielles : l'équation (3) (*).

On peut observer encore que les valeurs a_1 et a_2 peuvent être choisies une fois pour toutes, par exemple, d'après la forme de l'intégrale de (3), de manière à simplifier les opérations ultérieures.

a_1 et a_2 ne doivent pas varier avec X, dont la forme doit pouvoir rester quelconque..

(*) A première vue, on pourrait vouloir simplifier le raisonnement qui précède, en considérant z, dans l'équation

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = X,$$

comme une fonction de x et de la constante arbitraire c (ou y).

Différentiant par rapport à y, il viendrait :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Cette équation est plus simple que (3), mais en revanche on ne possède ici aucune ressource pour déterminer les fonctions arbitraires entrant dans son intégrale générale, sans retomber dans des intégrations aussi difficiles que celles de l'équation donnée.

Digitized by Google

Rappel du théorème fondamental. — L'intégration de toutes les équations linéaires du second ordre se ramène à savoir résoudre le problème suivant :

« On donne l'intégrale de

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = X + a,$$

ou celle de

$$\frac{t''}{t} = X + a \quad (*),$$

pour deux valeurs particulières, a_1 et a_2, de a; trouver l'intégrale de cette même équation pour a quelconque, ou simplement pour une troisième valeur a_3. »

Admettons, en effet, que ce problème soit résolu, et poursuivons les recherches.

PROBLÈME II. — On donne l'intégrale de

$$\frac{t''}{t} = F(x), \quad \ldots \quad (4)$$

trouver celle de

$$\frac{t''}{t} = \beta F(x) = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} F(x) \quad \ldots \quad (5)$$

Déterminons une forme f par l'équation

$$F[f(x)]f'^2(x) = a_2 - a_1,$$

laquelle s'intègre par des quadratures.

(*) Ces deux équations rentrent l'une dans l'autre, en posant $z = \frac{t'}{t}$.

Digitized by Google

Si l'on pose $x = f(u)$, $t = vf'^{\frac{1}{2}}(u)$, les équations (4) et (5) deviennent respectivement :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 + \frac{3}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f'''\right] =$$

$$v\left[F(f)f'^2 + \frac{D_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}\right], \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[\beta F(f)f'^2 + \frac{D_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}}\right] (*) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Posons encore :

$$\frac{D_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2}}} - a_1 = U \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Les équations (6) et (7) seront remplacées par :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v(U + a_2), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = v(U + a_3). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

(*) L'intégration de (6) conduit à celle de (4) en éliminant v et u entre l'intégrale de (6) et les équations

$$x = f(u),$$

$$t = vf'^{\frac{1}{2}}(u).$$

Réciproquement, si l'on connaissait l'intégrale de (4), il suffirait d'y remplacer x et t par les deux valeurs que je viens de transcrire, pour obtenir l'intégrale de (6).

De même pour les équations (7) et (5).

Digitized by Google

Or, on sait intégrer

$$\frac{d^2v}{du^2} = v(U + a_1),$$

parce qu'elle a pour solution particulière $v = f'^{-\frac{1}{2}}$, en vertu de l'équation (8); on sait aussi intégrer l'équation (9) par hypothèse; donc on sait intégrer l'équation (10) en vertu du problème fondamental, et, cette équation étant équivalente à (7) et à (5), le problème II est résolu.

PROBLÈME III. — Intégrer une équation linéaire quelconque du second ordre.

Elle peut toujours se ramener à la forme

$$\frac{d^2t}{dx^2} = tF(x).$$

Employons la même transformation qu'au problème II, mais sans déterminer d'abord la forme f.

On aura :

$$\frac{d^2v}{du^2} = v\left[F(f)f'^2 + \frac{5}{4}f'^{-2}f''^2 - \frac{1}{2}f'^{-1}f'''\right] =$$

$$v\left[F(f)f'^2 + \frac{3-1}{4\beta}f'^{-2}f''^2 + \beta\frac{D_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2\beta}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2\beta}}}\right].$$

Déterminons maintenant f par l'équation

$$F(f)f'^2 + \frac{3-1}{4\beta}f'^{-2}f''^2 = 0,$$

Digitized by Google

laquelle se résout complètement par des quadratures et des éliminations (*). Il restera :

$$\frac{D_u^2 v}{v} = \beta \cdot \frac{D_u^2\left(f'^{-\frac{1}{2\beta}}\right)}{f'^{-\frac{1}{2\beta}}}$$

équation que l'on résoudra au moyen du problème II.

(*) En passant l'un des termes au second membre, extrayant la racine carrée, puis intégrant, on a une équation ne contenant que f et f', et non la variable indépendante x.

Addition ou modification à la page 76. — Au lieu d'établir cette classification des douze équations, il vaut peut-être mieux raisonner ainsi :

Dans chacune des trois équations obtenues en substituant les valeurs de θ et de θ_1 dans (83), on pourra supprimer les termes qui s'annulent en vertu de l'intégrale connue d'avance, c'est-à-dire ceux qui ont pour facteur $y\psi_2 - \psi_1$ dans le premier et le troisième cas, $\psi_2 - \psi_1$ dans le second cas. On aura ainsi des équations différentielles, dans lesquelles ψ_1 et ψ_2 seront des fonctions de deux variables (indiquées pour chaque cas), tandis que χ pourra contenir $x, y, y', y'', \ldots$

Digitized by Google

PROPRIÉTÉS D'UN GROUPE DE TROIS PARABOLES

Par M. H. BROCARD.

Le plan d'un triangle renferme déjà deux groupes de trois paraboles qui présentent de curieuses propriétés.

Le premier groupe est formé de paraboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième.

Ces coniques, tangentes aux droites qui joignent entre eux les milieux des côtés, admettent pour axes des parallèles aux médianes et se recoupent deux à deux sur les deux autres médianes, qu'elles divisent dans le rapport de 7 à 8 (E. Lemoine).

Leurs foyers sont sur les symédianes AK, BK, CK du triangle (E. Lemoine)[1], aux points d'intersection A″, B″, C″, de ces lignes avec le cercle de Brocard (A. Artzt); autrement dit, ces foyers sont les projections du centre O du cercle circonscrit sur les symédianes.

Les paramètres sont exprimés par $\frac{2\Delta^2}{m_a{}^3}, \frac{2\Delta^2}{m_b{}^3}, \frac{2\Delta^2}{m_c{}^3}$ (A. Artzt)[2], m_a, m_b, m_c étant les médianes et Δ la surface du triangle.

Ces paraboles sont les enveloppes des droites qui joignent les points divisant respectivement les côtés, en suivant le même sens, dans un rapport constant (P. Barbarin)[3].

Le second groupe est formé de paraboles tangentes aux deux bissectrices

---

[1] *Mathesis*, tom. IV, 1884. Question 350, pag. 143.

[2] *Programme scolaire du gymnase de Recklinghausen*, 1884. *Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über kongruente Strahlenbüschel aus den Ecken desselben; ein Beitrag zur Geometrie des Brocardschen Kreises.*

[3] *Mathesis*, tom. IV, 1884. Question 341, pag. 142.

Digitized by Google

de chaque angle et aux perpendiculaires aux milieux des côtés qui comprennent cet angle.

Ces coniques ont été étudiées pour la première fois par M. A. Artzt, qui a démontré qu'elles admettent pour directrices les médianes, et les mêmes foyers que les paraboles précédentes. Il a aussi donné les expressions de leurs paramètres.

Ces paraboles sont, par définition, les enveloppes des droites qui joignent les points qui déterminent, sur les perpendiculaires aux côtés du triangle en leurs milieux, des segments proportionnels à ces côtés. En d'autres termes, ces coniques sont les enveloppes des droites qui joignent les sommets de triangles isoscèles semblables construits sur les côtés du triangle. Mais si l'on observe que le triangle des trois nouveaux points ainsi déterminés peut se réduire à un segment de droite et qu'il a toujours même centre de gravité que le triangle donné, on en conclut que le segment de droite limite passe par ce point et que celui-ci, se trouvant à la rencontre des trois directrices, est aussi l'intersection de deux tangentes rectangulaires communes aux trois paraboles.

L'étude détaillée des propriétés de ces deux groupes de paraboles fait l'objet d'un Mémoire que j'ai publié, en 1885, dans le *Journal de Mathématiques spéciales*[1].

J'ai pensé que cette curieuse propriété de trois paraboles admettant deux tangentes rectangulaires ne devait pas être un fait isolé.

Après quelques recherches, j'ai reconnu, en effet, un nouveau groupe de ces coniques, dont la description m'a paru digne de l'attention des géomètres.

Ces paraboles sont tangentes aux deux bissectrices de chaque angle et aux deux hauteurs correspondant aux côtés de cet angle.

Le groupe de ces coniques paraît si intimement lié au précédent, qu'il suffit d'établir un parallèle entre leurs propriétés pour arriver à reconnaître plusieurs des particularités qu'elles présentent.

---

[1] *Propriétés de l'hyperbole des neuf points et de six paraboles remarquables.* 32 pages, 6 figures, 1 planche.

Digitized by Google

Les deux bissectrices de chaque angle d'un triangle et les perpendiculaires aux côtés de cet angle en leurs milieux forment un système de quatre tangentes à une parabole.

Les trois paraboles ainsi déterminées admettent pour directrices les médianes et pour foyers les intersections des symédianes avec la circonférence décrite sur la distance du centre du cercle circonscrit au centre des symédianes (point de Lemoine) comme diamètre.

Les diverses tangentes à chaque parabole rencontrent les perpendiculaires aux milieux des côtés en des points tels, que les droites qui les joignent au troisième sommet du triangle sont symétriques par rapport à la bissectrice. Les points de contact des perpendiculaires aux milieux des côtés avec la parabole sont donc à l'intersection de ces perpendiculaires avec la droite symétrique de celle qui aboutit du sommet du triangle au centre du cercle circonscrit, c'est-à-dire avec la hauteur du triangle.

Le milieu du segment ainsi intercepté entre les deux perpendiculaires aux milieux des côtés étant joint au centre du cercle circonscrit, on a la direction des diamètres et de l'axe de la parabole.

On en conclut cette propriété du triangle :

Les droites qui joignent le centre du cercle circonscrit aux milieux des segments interceptés par les perpendiculaires aux milieux des côtés sur

Les deux bissectrices de chaque angle d'un triangle et les hauteurs correspondant aux côtés de cet angle forment un système de quatre tangentes à une parabole.

Les trois paraboles ainsi déterminées admettent pour directrices les symédianes et pour foyers les intersections des médianes avec la circonférence décrite sur la distance du centre de gravité à l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) comme diamètre.

Les diverses tangentes à chaque parabole rencontrent les hauteurs en des points tels, que les droites qui les joignent au troisième sommet du triangle sont symétriques par rapport à la bissectrice. Les points de contact des hauteurs du triangle avec la parabole sont donc à l'intersection de ces hauteurs avec la droite symétrique de celle qui aboutit du sommet du triangle à l'orthocentre, c'est-à-dire avec le rayon correspondant du centre circonscrit.

Le milieu du segment ainsi intercepté entre les deux hauteurs étant joint à l'orthocentre, on a la direction des diamètres et de l'axe de la parabole.

On en conclut cette propriété du triangle :

Les droites qui joignent l'orthocentre aux milieux des segments interceptés par les hauteurs du triangle sur les rayons du cercle circonscrit aboutis-

Digitized by Google

la hauteur du triangle sont perpendiculaires aux médianes correspondantes.

En vertu d'une propriété connue, les deux tangentes rectangulaires représentées par les deux bissectrices de chaque angle forment avec la direction de l'axe et avec la ligne aboutissant au foyer des angles égaux. C'est pourquoi les foyers de ces trois paraboles se trouvent sur les symédianes du triangle.

Les points de contact des tangentes rectangulaires représentées par les bissectrices sont évidemment à la rencontre de ces droites avec la perpendiculaire menée du foyer à la droite qui joint ce point au sommet du triangle; autrement dit, avec la symédiane correspondante.

Ces paraboles sont toutes les trois tangentes à deux autres droites rectangulaires passant par le centre de gravité, point de rencontre des directrices.

Les équations des médianes, directrices des paraboles, sont respectivement

$$b\beta - c\gamma = 0,$$
$$a\alpha - c\gamma = 0,$$
$$a\alpha - b\beta = 0.$$

Les foyers A″, B″, C″ ont respectivement pour coordonnées :

$$\frac{a\alpha}{m^2 - 2a^2} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{2\Delta}{2m^2 - 3a^2},$$

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b\beta}{m^2 - 2b^2} = \frac{\gamma}{c} = \frac{2\Delta}{2m^2 - 3b^2},$$

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{c\gamma}{m^2 - 2c^2} = \frac{2\Delta}{2m^2 - 3c^2},$$

sant aux sommets du triangle sont perpendiculaires aux symédianes correspondantes.

En vertu d'une propriété connue, les deux tangentes rectangulaires représentées par les deux bissectrices de chaque angle forment avec la direction de l'axe et avec la ligne aboutissant au foyer des angles égaux. C'est pourquoi les foyers de ces trois paraboles se trouvent sur les médianes du triangle.

Les points de contact des tangentes rectangulaires représentées par les bissectrices sont évidemment à la rencontre de ces droites avec la perpendiculaire menée du foyer à la droite qui joint ce point au sommet du triangle; autrement dit, avec la médiane correspondante.

Ces paraboles sont toutes les trois tangentes à deux autres droites rectangulaires passant par le centre des symédianes, point de rencontre des directrices.

Les équations des symédianes, directrices des paraboles, sont respectivement

$$c\beta - b\gamma = 0,$$
$$c\alpha - a\gamma = 0,$$
$$b\alpha - a\beta = 0.$$

Les foyers F_a, F_b, F_c ont respectivement pour coordonnées :

$$\frac{(m^2 - 2a^2)\alpha}{a} = b\beta = c\gamma = \frac{2\Delta(m^2 - 2a^2)}{2m^2 - 3a^2},$$

$$a\alpha = \frac{(m^2 - 2b^2)\beta}{b} = c\gamma = \frac{2\Delta(m^2 - 2b^2)}{2m^2 - 3b^2},$$

$$a\alpha = b\beta = \frac{(m^2 - 2c^2)\gamma}{c} = \frac{2\Delta(m^2 - 2c^2)}{2m^2 - 3c^2},$$

Digitized by Google

avec

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les distances des foyers aux directrices, ou les paramètres des paraboles, ont donc respectivement pour expressions

$$\frac{abc\,(b^2-c^2)}{2\,\mathrm{R}m_a^3},\quad \frac{abc\,(a^2-c^2)}{2\,\mathrm{R}m_b^3},\quad \frac{abc\,(a^2-b^2)}{2\,\mathrm{R}m_c^3},$$

m_a, m_b, m_c désignant les médianes et R le rayon du cercle ABC.

Une de ces expressions se réduit à zéro lorsque le triangle est isoscèle, comme on pouvait le prévoir.

Ces trois foyers se trouvent aussi à l'intersection des symédianes avec les circonférences passant par le centre O du cercle circonscrit et par deux des sommets A, B, C, du triangle.

Le cercle des trois foyers, décrit sur OK comme diamètre, a pour équation

$$abc\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = a^3\beta\gamma + b^3\alpha\gamma + c^3\alpha\beta;$$

ou

$$abc\,\Sigma\,\alpha^2 = \Sigma\,a^3\beta\gamma.$$

Les paraboles A″, B″, C″ sont respectivement tangentes aux côtés B′C′, A′C′, A′B′ d'un triangle A′B′C′ inscrit dans le cercle des trois foyers, et homologique au triangle A″B″C″ par rapport au point G, centre de gravité du triangle donné.

avec

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les distances des foyers aux directrices, ou les paramètres des paraboles, ont donc respectivement pour expressions

$$\frac{(m^2-2a^2)\,(b^2-c^2)}{2\mathrm{R}\,(2m^2-3a^2)},\quad \frac{(m^2-2b^2)\,(a^2-c^2)}{2\mathrm{R}\,(2m^2-3b^2)},\quad \frac{(m^2-2c^2)\,(a^2-b^2)}{2\mathrm{R}\,(2m^2-3c^2)},$$

m^2 désignant $a^2+b^2+c^2$ et R le rayon du cercle ABC.

Une de ces expressions se réduit à zéro lorsque le triangle est isoscèle ou rectangle, comme on pouvait le prévoir.

Ces trois foyers se trouvent aussi à l'intersection des médianes avec les circonférences passant par le centre de gravité G et par deux des points A″, B″, C″ [1].

Le cercle des trois foyers, décrit sur GH comme diamètre, a pour équation

$$2a\alpha^2\cos\mathrm{A} + 2b\beta^2\cos\mathrm{B} + 2c\gamma^2\cos\mathrm{C} = a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta,$$

ou

$$2\Sigma\,a\alpha^2\cos\mathrm{A} = \Sigma\,a\beta\gamma.$$

Les paraboles F_a, F_b, F_c sont respectivement tangentes aux côtés $\mathrm{F}_b'\mathrm{F}_c'$, $\mathrm{F}_a'\mathrm{F}_c'$, $\mathrm{F}_a'\mathrm{F}_b'$, d'un triangle $\mathrm{F}_a'\mathrm{F}_b'\mathrm{F}_c'$ inscrit dans le cercle des trois foyers, et homologique au triangle $\mathrm{F}_a\mathrm{F}_b\mathrm{F}_c$ par rapport au point K, centre des symédianes ou point de Lemoine.

Je ne crois pas nécessaire d'établir d'autres rapprochements ; il suffira d'avoir montré le rôle important que jouent, dans ces nouvelles propriétés,

[1] Cette propriété a été signalée par M. W. S. M'Cay.

Digitized by Google

les couples de points tels que le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre, le centre de gravité et le point de Lemoine, ainsi que de droites telles que les médianes et les symédianes, les hauteurs du triangle et les rayons du cercle circonscrit, etc., points et droites qui se correspondent mutuellement dans la transformation par droites symétriques.

Je terminerai cette notice par l'indication de quelques résultats analytiques.

Les paraboles considérées F_a, F_b, F_c ont respectivement pour équations :

$$(\beta \cos C + \gamma \cos B)^2 = 4\alpha \cos A\ (\beta \cos B + \gamma \cos C - \alpha \cos A),$$
$$(\alpha \cos C + \gamma \cos A)^2 = 4\beta \cos B\ (\alpha \cos A + \gamma \cos C - \beta \cos B),$$
$$(\alpha \cos B + \beta \cos A)^2 = 4\gamma \cos C\ (\alpha \cos A + \beta \cos B - \gamma \cos C).$$

Les droites F_aF_a', F_bF_b', F_cF_c' ont pour équations

$$2\alpha \cos A \sin (C - B) = \beta \sin (A - B) + \gamma \sin (C - A),$$
$$2\beta \cos B \sin (C - A) = \alpha \sin (B - A) + \gamma \sin (C - B),$$
$$2\gamma \cos C \sin (B - A) = \alpha \sin (B - C) + \beta \sin (C - A).$$

On reconnaîtrait facilement que ces droites passent par le point de Lemoine

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Les coordonnées des points F_a', F_b', F_c' vérifient les équations

$$\beta \cos B = \gamma \cos C = 2\alpha \cos B \cos C,$$
$$\alpha \cos A = \gamma \cos C = 2\beta \cos A \cos C,$$
$$\alpha \cos A = \beta \cos B = 2\gamma \cos A \cos B.$$

On en déduirait les équations des droites $F_b'F_c'$, $F_a'F_c'$, $F_a'F_b'$ qui sont respectivement tangentes aux paraboles F_a, F_b, F_c.

Enfin, l'expression des coordonnées des foyers et les considérations précédentes permettent de conclure que ces foyers sont des points correspondants qui résultent d'une transformation par droites symétriques.

Dans cette transformation, à une circonférence telle que OK correspond une courbe du quatrième degré ; mais il est intéressant d'observer que les correspondants G, H, F_a, F_b, F_c, des points K, O, A″, B″, C″ sont aussi sur une circonférence, et réciproquement.

Digitized by Google

Cet exemple de corrélation entre deux groupes de cinq points qui se correspondent sur deux circonférences est probablement nouveau, et l'étude de cette figure paraît devoir conduire à d'intéressants résultats.

Voici, par exemple, quelques propriétés des triangles ABC, A′B′C′ et du triangle $A'_1B'_1C'_1$ des transformés des points A′, B′, C′ par droites symétriques, c'est-à-dire ayant respectivement leurs coordonnées proportionnelles à

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{b}{c^2}, \frac{c}{b^2}\right), \left(\frac{a}{c^2}, \frac{1}{b}, \frac{c}{a^2}\right), \left(\frac{a}{b^2}, \frac{b}{a^2}, \frac{1}{c}\right).$$

1° Les triangles ABC, A′B′C′ sont homologiques.

Leur centre d'homologie est un point D, dont les distances aux côtés du triangle ABC sont inversement proportionnelles aux cubes de ces côtés.

D est aussi, comme on sait, sur la ligne qui joint le centre de gravité G au milieu S de ΩΩ′, et l'on a DG = 2.GS; en d'autres termes, HD est parallèle à OD′.

L'axe d'homologie des triangles considérés ABC, A′B′C′ est une certaine droite (Ξ) perpendiculaire à OD.

2° Les triangles ABC, $A'_1B'_1C'_1$ sont homologiques.

Leur centre d'homologie est un point D′ dont les distances aux côtés du triangle ABC sont proportionnelles aux cubes de ces côtés.

D′ est aussi, comme on sait, le pôle de ΩΩ′ relativement au cercle de Brocard. Il est également le transformé du point D par droites symétriques.

L'axe d'homologie des triangles ABC, $A'_1B'_1C'_1$ est la même droite (Ξ) que pour les triangles ABC, A′B′C′ déjà considérés.

3° Les triangles A′B′C′, $A'_1B'_1C'_1$ sont homologiques.

Leur centre d'homologie est un point J, situé à l'intersection des droites OH et SS′, S′ étant le transformé du point S par droites symétriques[1].

Le point J a pour coordonnées trilinéaires des quantités proportionnelles à

$$\frac{b^2c^2 + a^4}{a}, \frac{a^2c^2 + b^4}{b}, \frac{a^2b^2 + c^4}{c}.$$

[1] Ce point S′ se trouve lui-même à l'intersection des droites DK et D′G.

Digitized by Google

L'axe d'homologie des triangles $A'B'C'$, $A'_1B'_1C'_1$ est encore la même droite (Ξ) que pour les triangles précédemment considérés.

On vérifierait également que l'un des points de rencontre R de OD avec le cercle ABC (ou le point de Steiner) est sur la droite SS'.

Enfin, la courbe du quatrième degré transformée du cercle de Brocard par droites symétriques a pour équation

$$\alpha\beta\gamma\ (a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma) = abc\ (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2).$$

On reconnaîtra aisément qu'elle passe par les points G, Ω, Ω', H, F_a, F_b, F_c, A_1', B_1', C_1', et qu'elle admet pour points doubles les sommets du triangle opposés aux côtés rencontrés par le cercle de Brocard.

Enfin les équations qui nous ont servi précédemment à former les coordonnées des foyers F_a, F_b, F_c montrent que ces points correspondent aux foyers $A''B''C''$ des paraboles de M. Artzt dans une transformation par droites symétriques.

L'étude de ces nouvelles propriétés du triangle sera facilement développée par tout chercheur curieux d'approfondir ce sujet.

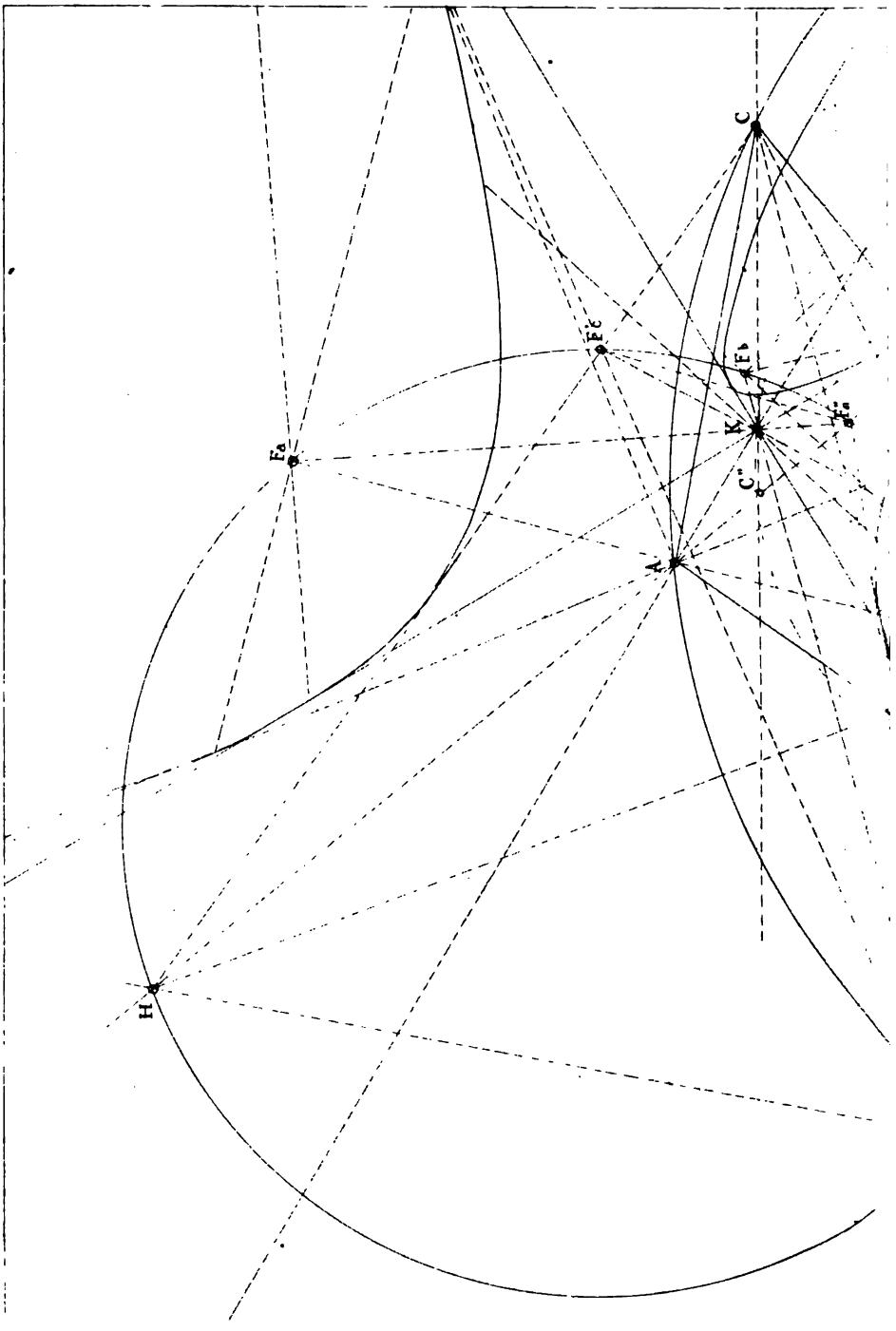
Extrait des Mémoires de l'Académie de Montpellier. — *Section des Sciences*

1886

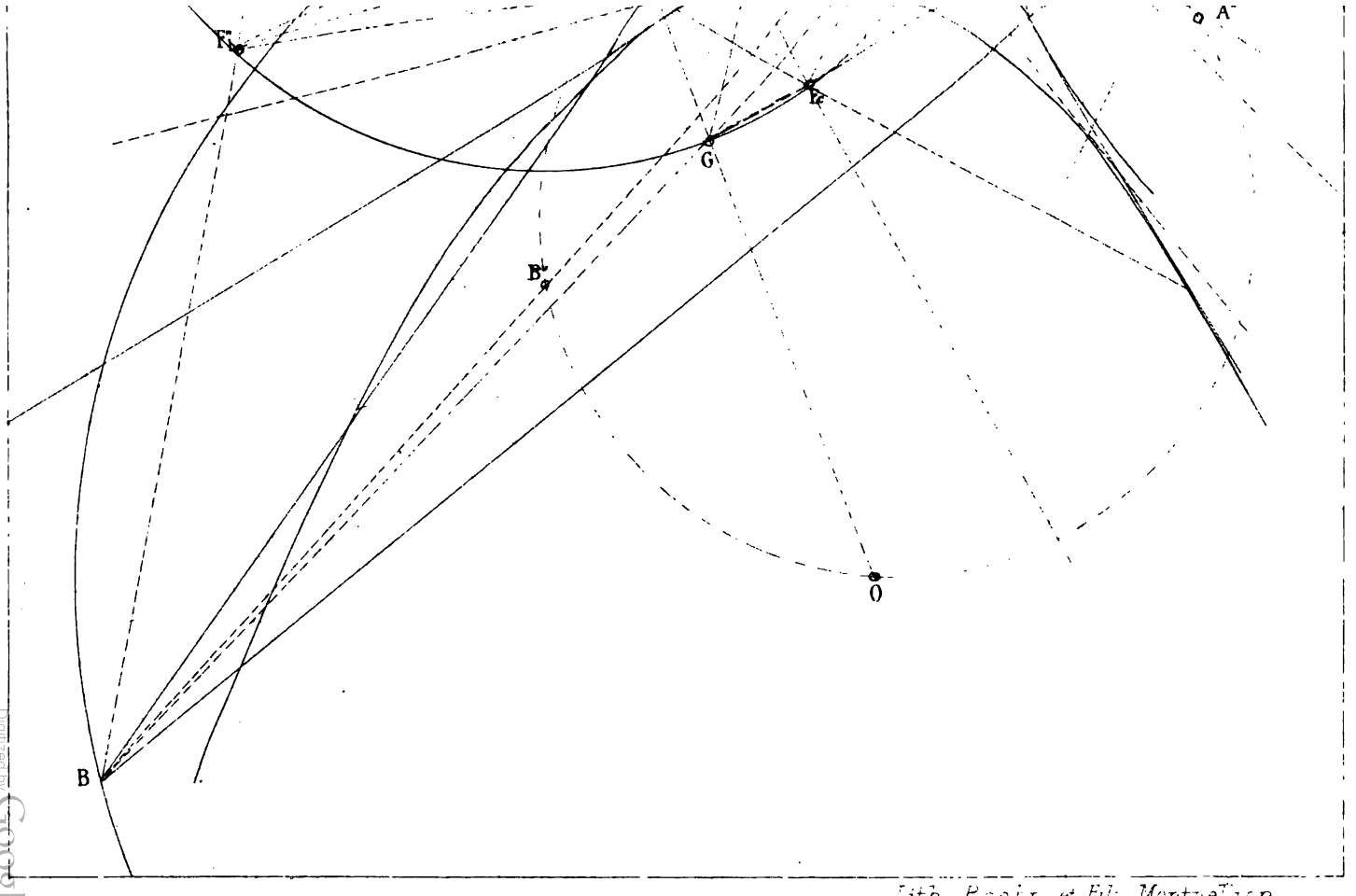
Montpellier. — Typ. Boehm et Fils.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

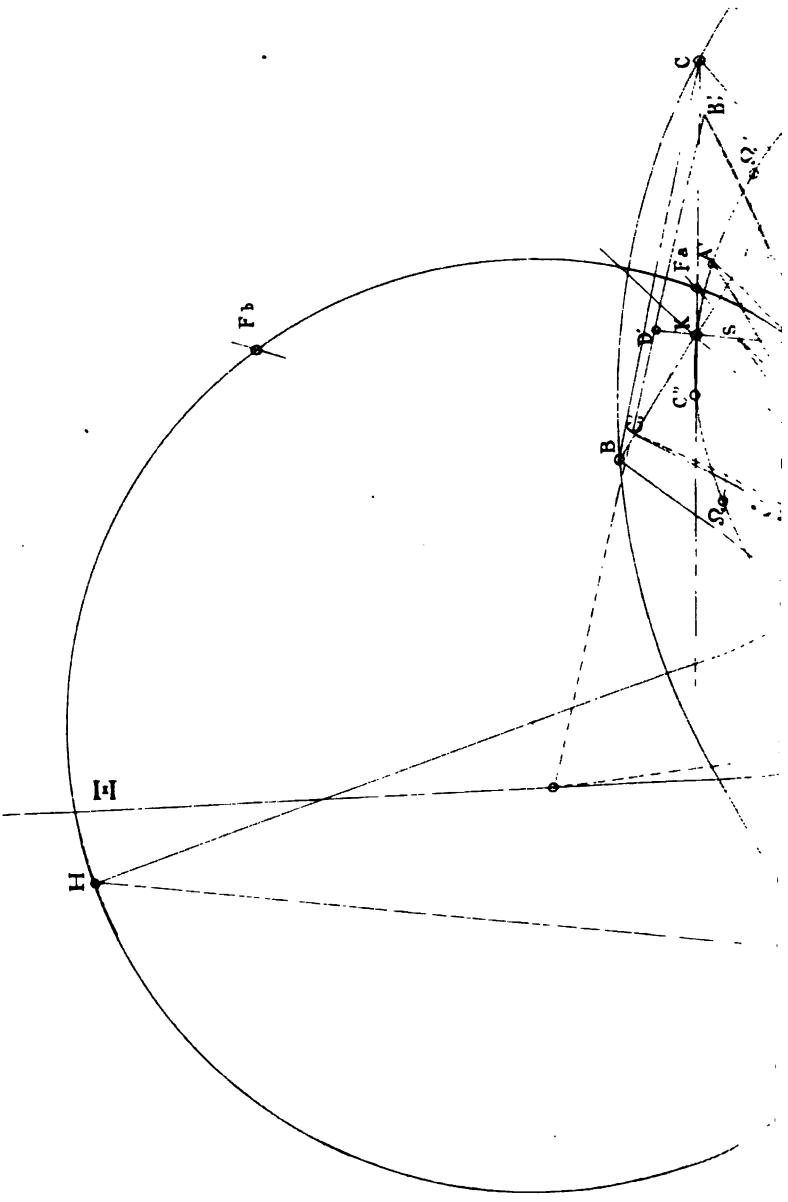


Lith. Boehm et Fils Montpellier

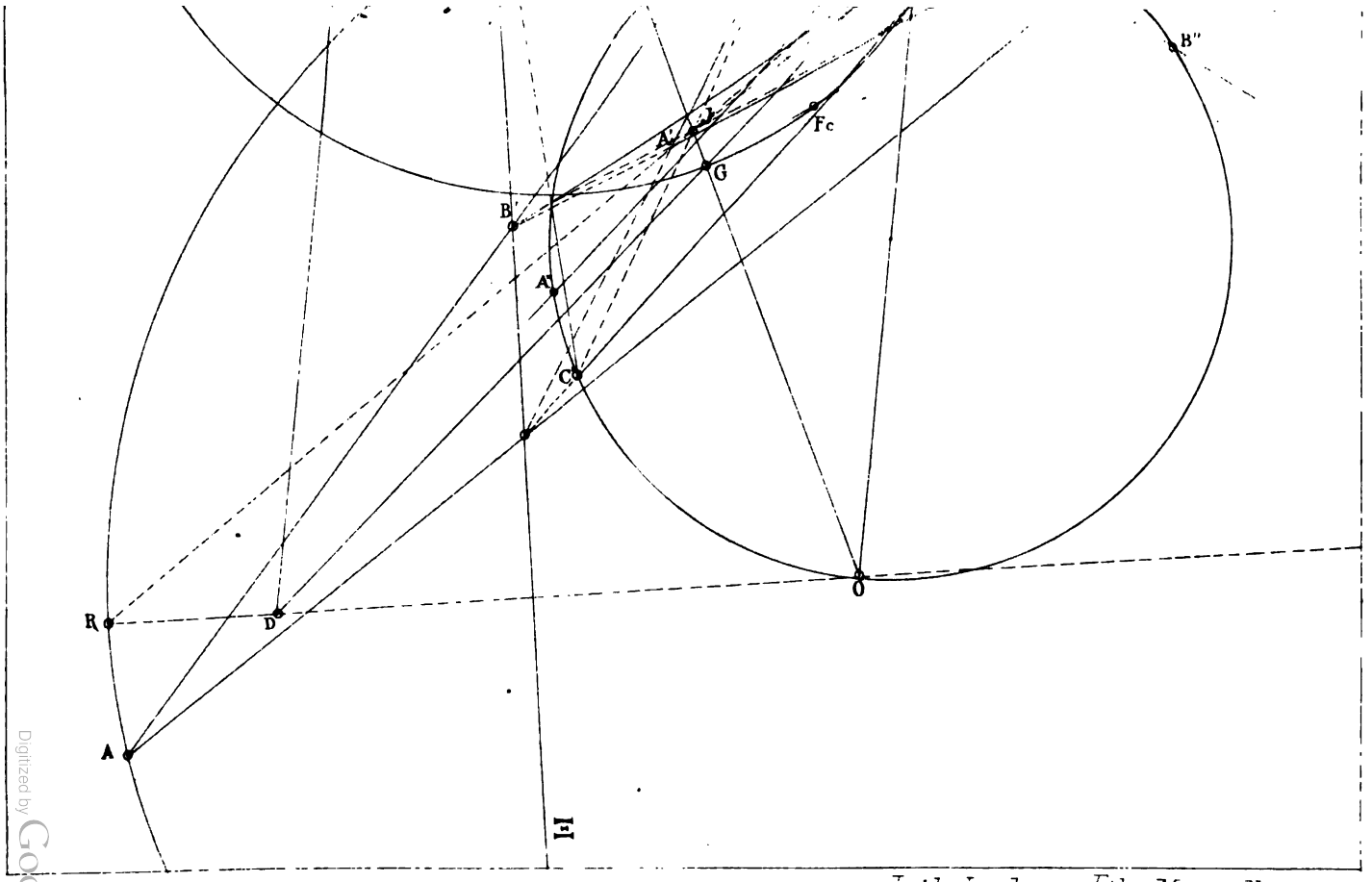
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google



Lith. Boehm et Fils Montpellier

Pl. II

Digitized by Google

Digitized by Google

Librairie de GAUTHIER-VILLARS
QUAI DE AUGUSTINS, 55, PARIS,
ET DE **Ad. HOSTE**, RUE DES CHAMPS, 49, GAND.

RÉSUMÉ DU COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE
DE L'UNIVERSITÉ DE GAND,

(CALCUL DIFFÉRENTIEL ET PRINCIPES DE CALCUL INTÉGRAL)

PAR

P. MANSION,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE GAND,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

Un volume grand in-8° de VIII-300 pages. Prix : **DIX** francs.
(*Le second fascicule seul*, pp. I-VIII, 33-300, **9** francs).

PRÉFACE.

L'ouvrage que nous publions aujourd'hui est le résumé des Leçons d'Analyse infinitésimale que nous professons depuis vingt ans à l'Université de Gand. Nous y exposons, sous une forme condensée, les principes de la théorie des fonctions élémentaires.

Le cadre de notre livre est moins étendu que celui de beaucoup de Traités de Calcul différentiel et de Calcul intégral; car, en général, nous en excluons, d'une manière systématique, les fonctions que l'on ne rencontre pas dans les Éléments. Mais, en revanche, dans ce cadre restreint, nous croyons avoir étudié la théorie des fonctions

Digitized by Google

d'une manière plus approfondie qu'on ne le fait ordinairement, parce que nous considérons partout la variable indépendante comme étant indifféremment réelle ou imaginaire.

Pour étendre les règles du Calcul différentiel et les propriétés des fonctions au cas d'une variable imaginaire, sans recourir à la théorie des intégrales curvilignes de Cauchy, nous avons dû modifier assez profondément, sur plusieurs points, l'enseignement traditionnel.

D'abord, nous avons défini les exponentielles imaginaires sans aucune considération de séries. Pour nous, e^{yi} est une manière abrégée d'écrire $\cos y + i \sin y$ et e^z est le produit $e^x.e^{yi}$, quand $z = x + yi$. En partant de cette définition, nous avons pu trouver, sans difficulté, la dérivée de toutes les fonctions élémentaires simples d'une variable $z = x + yi$.

La règle de la dérivation des fonctions composées, telle qu'elle est donnée dans beaucoup de manuels, n'est pas établie rigoureusement et s'applique d'ailleurs uniquement au cas où la variable est réelle. Nous remplaçons cette démonstration insuffisante et incomplète par une autre, élémentaire et générale, déduite des règles particulières relatives aux sommes, aux produits et aux exponentielles composées. Nous avons employé le même procédé pour démontrer le théorème de l'interversion des dérivations, sans recourir à aucun postulat. Au moyen de la règle de la dérivation des fonctions composées et des règles spéciales relatives aux fonctions simples d'une variable réelle ou imaginaire, nous avons pu établir, avec la même généralité, l'ensemble des formules qui constituent le *Calcul différentiel*, y compris la théorie des déterminants fonctionnels.

En vue de traiter d'une manière complète et à sa place naturelle, la question du reste des formules de Taylor, de Newton, de Wronski et de Gauss, nous avons réuni les propriétés fondamentales des dérivées, des intégrales et des séries, dans une section spéciale, en tête du Calcul différentiel.

Enfin, dans la *Théorie des fonctions* proprement dite, nous avons pris pour point de départ, non seulement le théorème de Rolle ou la

Digitized by Google

relation équivalente, $\Delta Fx = \Delta x F'(x + \theta\Delta x)$, mais aussi le théorème plus général de Darboux, $\Delta Fz = \lambda\sqrt{2e^{\alpha t}}\Delta z F'(z + \theta\Delta z)$. Grâce à ce dernier principe, nous avons pu exposer, dans ce cours d'Analyse élémentaire, maintes théories habituellement rejetées en Analyse supérieure; par exemple, celles des exponentielles et des logarithmes imaginaires, le développement du binôme dans tous les cas où il subsiste, la formule de Taylor et la loi suprême de Wronski pour les fonctions d'une variable réelle ou imaginaire, les propriétés des fonctions homogènes, des wronskiens et des déterminants fonctionnels, etc.

Notre Résumé d'Analyse infinitésimale est divisé en six sections : I. Introduction. II. Propriétés fondamentales des dérivées, des intégrales et des séries. III. Calcul différentiel. IV. Propriétés des fonctions. V. Appendice. VI. Notes complémentaires.

Les deux premières sections ont été publiées, dès 1877, à l'usage de nos élèves. A cause de l'extrême concision avec laquelle elles sont rédigées, et aussi de l'importance des questions de principe qui y sont exposées, nous avons cru devoir les compléter et les commenter dans l'Appendice et les Notes. Que l'on nous permette d'attirer spécialement l'attention du lecteur sur quelques points traités dans ces quatre sections.

Dans les trois premiers chapitres de l'Appendice, nous donnons une esquisse historique des progrès de l'Analyse infinitésimale, la traduction des premiers articles de Leibniz et de Newton sur le Calcul différentiel et une notice sur les différentes manières de concevoir la théorie des infiniment petits depuis Kepler jusqu'à Cauchy. Nous croyons avoir prouvé, par des textes décisifs, que les grands géomètres du dix-septième siècle n'admettaient pas l'existence des pseudo-infiniment petits et que Leibniz et Newton, en particulier, entendaient déjà le calcul infinitésimal de la même manière que Cauchy, cent cinquante ans après eux.

Dans les deux chapitres suivants, nous démontrons le principe fondamental de la méthode des limites : *Une variable toujours croissante a une limite finie ou infinie*, et nous en montrons l'équi-

Digitized by Google

valence avec le théorème moins simple appelé *caractère principal de convergence*. La théorie des limites, dans son ensemble, est exposée dans l'Introduction et dans les Notes.

Nous consacrons ensuite un chapitre spécial au principe de substitution des infiniment petits. Nous espérons avoir établi les conditions d'existence de ce principe avec plus de précision qu'on ne l'a fait jusqu'à présent et l'avoir appliqué avec rigueur à la Géométrie de la mesure (rectifications, quadratures, cubatures).

Enfin, dans le chapitre relatif aux propriétés fondamentales des dérivées, on trouvera une démonstration directe du théorème qui établit la liaison entre le Calcul différentiel et le Calcul intégral : *deux fonctions qui ont même dérivée ne diffèrent que par une constante;* et, dans l'Appendice, une note sur la fonction continue sans dérivée, de Weierstrass.

Pour rédiger ce livre, nous avons consulté la plupart des bons Traités d'Analyse infinitésimale, en particulier, les *Éléments* de notre maître vénéré, Mathias Schaar, et ceux de nos collègues de Liège et de Louvain, MM. Catalan et Gilbert. Mais nous devons signaler spécialement, parmi les écrits qui nous ont servi de guide, les manuels de Cauchy et de Duhamel, le *Lehrbuch der Analysis* de M. Lipschitz, et, à partir du n° 214, le Cours de MM. Genocchi et Peano; puis enfin et surtout, l'admirable *Mémoire* de M. Darboux *sur les fonctions discontinues*.

MM. Brocard, Mister, Neuberg, Saurel, Verstraeten ont bien voulu partager avec nous la tâche ingrate de la revision des épreuves de notre livre et nous ont maintes fois suggéré d'utiles corrections, tant pour le fond que pour la forme. Nous leur en adressons ici nos bien vifs remercîments.

Gand, 4 octobre 1887.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION. OBJET ET MÉTHODE DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE 1, 193, 264

CHAPITRE PREMIER. **Définition de l'analyse infinitésimale** . 1, 193, 264

1. Des variables 1, 264
2. Des fonctions 1, 264
3. Objet de l'analyse infinitésimale 2, 265
4 Aperçu historique 2, 193, 265

CHAPITRE II. **Méthode des limites** 3, 225, 265

1. Définition 3, 225, 265
2. Principes de la méthode des limites 4, 227, 266

CHAPITRE III. **Limites des fonctions élémentaires** 6, 267

1. Limites trouvées dans les éléments 6, 267
2. Limite de $(\sin x : x)$, pour $x = 0$, et limites qui en dépendent . . . 7
3. Limite de $(1 + m^{-1})^m$, pour $m = \infty$, et limites qui en dépendent . 8, 270

CHAPITRE IV. **Méthode infinitésimale** 10, 270

1. Définitions 10, 270
2. Principe fondamental 1, 241, 271

CHAPITRE V. **Fonctions d'une variable imaginaire**. 13, 271

1. Fonctions hyperboliques 13, 271
2. Exponentielles purement imaginaires 13
3. Exponentielles composées 14, 272
4. Limite des fonctions élémentaires 15, 272

CHAPITRE VI. **Propriétés diverses des fonctions**. 16, 272

1. Réduction de toutes les fonctions aux fonctions simples 16
2. Classification des fonctions élémentaires 17, 272

Digitized by Google

Pages.

CHAPITRE VII. **Continuité des fonctions** 18, 273
1. Définitions 18, 273
2. Continuité des fonctions élémentaires 19
3. Propriétés des fonctions continues 20, 273
PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE 21, 274
CHAPITRE PREMIER. **Définition et propriétés fondamentales des dérivées** 21, 274
1. Dérivée 21, 274
2. Propriétés fondamentales de la dérivée 23, 275
CHAPITRE II. **Définition et propriétés fondamentales des intégrales** 25, 275
1. Limite de somme 25, 275
2. Intégrale. 27, 276
CHAPITRE III. **Définition et propriétés fondamentales des séries.** 28, 250, 278
1. Définitions et conséquences immédiates 28, 278
2 Propriétés diverses des séries convergentes 29, 280
3. Caractères élémentaires de convergence et de non-convergence 30, 261, 281
4. Intégration des séries 32, 250, 283
NOTE SUR L'AIRE DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE. 32
CALCUL DIFFÉRENTIEL 33, 283
CHAPITRE PREMIER. **Dérivées et différentielles premières des fonctions d'une seule variable** 33
1. Dérivées et différentielles fondamentales 33
2. Fonction de fonction 33, 283
3. Dérivées et différentielles de fonctions composées 36, 283
4 Dérivées des fonctions élémentaires explicites 40, 283
5 Formule générale de dérivation (différentiation) des fonctions composées 46, 284
6. Dérivation et différentiation des fonctions implicites 52
7. Des déterminants fonctionnels 55
CHAPITRE II. **Dérivées et différentielles d'ordre quelconque des fonctions d'une seule variable** 59, 284
1. Fonctions explicites 59, 284
2. Principes de l'interversion des dérivations 62, 284
3. Fonctions implicites 65
CHAPITRE III. **Différentielles des fonctions de plusieurs variables** . 66
1. Fonctions explicites 66
2. Fonctions implicites 69
CHAPITRE IV. **Changement de variables** 71
1. Une seule variable indépendante 71
2. Plusieurs variables indépendantes 74

Digitized by Google

Pages.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS 75, 284

CHAPITRE PREMIER. **Théorème de Rolle** 75, 284

1. Préliminaires 75, 284

2. Théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable. 79

3 Théorème de Lagrange 82

4. Théorème de Cauchy 86

5 Vraies valeurs des expressions prenant une forme indéterminée . . 88

6. Théorème de Rolle pour les fonctions d'une variable imaginaire. . 91, 284

7. Propriétés fondamentales des fonctions homogènes, des wronskiens et des déterminants fonctionnels 99

CHAPITRE II. **Théorèmes de Taylor et de Newton; formule de Gauss** 103, 285

1. Théorème de Taylor pour les fonctions d'une seule variable . . 103, 285

2. Formule de Newton 120, 285

3. Formule de quadrature de Gauss. 127, 285

4. Théorème de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables . . 133

CHAPITRE III. **Développements en série** 136, 255, 285

1. Formule générale 136

2. Fonctions transcendantes directes 139

3. Logarithmes. 143, 285

4. Binôme 155, 286

CHAPITRE IV. **Maxima et minima** 169, 286

1. Fonction explicite d'une seule variable 169

2. Fonctions implicites de plusieurs variables 176, 286

3. Fonctions implicites; maxima et minima relatifs; méthode des multiplicateurs 187

APPENDICE. CHAPITRE PREMIER. Esquisse historique 192, 286

CHAPITRE II. Premiers principes du Calcul différentiel, par Leibniz et Newton (1684; 1687) 199

CHAPITRE III. Indéfiniment petits. Infiniment petits et pseudo-infiniment petits 212, 288

CHAPITRE IV. Principes généraux de la méthode des limites. . . . 225, 291

CHAPITRE V. Caractère général de convergence. 234, 291

CHAPITRE VI. Sur le principe de substitution des infiniment petits. . . 241

CHAPITRE VII. La fonction continue sans dérivée de Weierstrass . . . 247

CHAPITRE VIII. Compléments de la théorie des séries 250

NOTES COMPLÉMENTAIRES 264

Digitized by Google

INDEX.

(Les numéros entre parenthèses sont ceux des notes complémentaires).

I.

Abel, (N^os 10-11), 14, (128), 287, 288, 320, 321, 322.
Ampère, 243.
Archimède, 15, 29, 287, 288, 289, note 9, 292, II.
Barrow, (288, II), 289 note 7, (292, I).
Bernoulli (Jacques), 15, 287, 288, (292, II); (Jean), 15, 287, 288, 289, note 11, 291, IV, 292, IX, X, (292, II).
Bertrand, 284, 303.
Bonnet, 204.
Brasseur, (292, III, note).
Brioschi, 287, 288.
Carnot, (292, III, note).
Catalan, (122), (126), (129), 261, 271, 301, 309, note.
Cauchy, 14, 16, 47, (47), 92, 94, 106, 200, 204, 212, 215, 218, 219, 233, 241, 244, 287, 288, 289, note 4, 290, note 22, 291, IV, 292, VIII, XIII, 303, 314, 321.
Cavalieri, 288, 291, IV, 292, II,
Cayley, 14, 287, 288.
Cesáro, (123).
Clebsch, 14, 287, 288.
Cournot, 292, XIII.
d'Alembert, (292, III).
Darboux, (92), 223, 232, 319.
De Beaune, 289, X.
De Comberousse, (58).
Dedekind, 310.
De Morgan, 292, VII.
Descartes, (14-15), 15, 288.
Duhamel, 292, XIII, 322.
Eneström, (243), (246).
Euclide, 28, (28), 29, 288, 292, II.
Eudoxe, 288, 289, note 9
Euler, 14, (45), 64, 287, 288, 292, XII, (292).
Fermat, (14-15), 15, 287, 288, (288, II), 289, note 7, 291, IV, 292, VI.
Fontenelle, (292, II).
Gauss, 14, 248, (248), 287, 288.
Genocchi, 217, 226, 303
Gilbert, (93), 317.
Glaisher, (38).
Grégoire de Saint Vincent, 288, (288, II, note), 292, VII.
Guldin, 288, p. 196, 292, I.
Hermann, (246).
Hermite, 14, (29), 38, 287, 288, 314.
Hospital (Marquis de l'), 200, 215, 217, 218, 291, IV, 292, VIII, X.
Huygens, 15, 288, 292, VII, (292, I).
Jacobi, 14, 157, 287, 288.
Jensen, 321.
Jordan, 322.
Kepler, 15, 288, 291, IV, 292, I, II.
Kronecker, 287, 288.
Lacroix, 289, note 9, (292, II, III), 320.
Lagrange (Charles), 242.

Digitized by Google

Lagrange, 14, 94, 206, 210, 211, 218, 220, 222, 223, 225, 234, 243, 287, 288, (292).
Lambert, 29.
Landen, (292, III).
Laplace, 169, 238.
Lefébure, 43, 64.
Legendre, 14, 29, 248, 287, 288.
Leibniz, 14, 97, 173, 209, 287, 288, (288, II) 289, 290, notes 17, 22, 23, 291, IV, 292, VIII, IX, (292, II).
Le Paige, (292, I).
Lindemann, (29).
Liouville, 38, 235, 236.
Lipschitz, 26, (26), 310.
Maclaurin, 15, 240, 251, 252, 287, 288, 292, V, XI.
Markoff, (248).
Martens, 321.
Moivre, 64.
Moigno, 106.
Muir, 227.
Navier, 292, XIII.
Neper, 15, (38), 288.
Newton, 14, 94, 236, 243, (243), 245, 262, 287, 288, (288, II), 289, note 6, 290, 291, I, 292, VII, (292, I).
Pascal, 288, 291, IV, 292, IV, VII.
Pappus, 288.
Peano, 217, 226, 280, 303.
Pezenas, 287.
Poinsot, (292, III).
Poisson, (45), 291, IV, 292, XIII.
Possé, (248).
Raabe, (128).
Riemann, 14, 125, (125), 219, 287, 288.
Roberval, 288, 291, IV, 292, III.
Rolle, 105, 203-205, 224.
Rouché, (58).
Rouquet, 200, 217.
Schaar, 36, 38, 64, 69, 105.
Scheeffer, 313.
Schlömilch, 230, 231.
Sluse, 288, 289, note 7, (292, I).
Sylvester, 287, 288.
Tacquet, (292, I).
Taylor, 230, 250, 255.
Thomae, 93.
Viète, (288, I).
Wallis, 15, 288, 292, V, (292, I).
Weierstrass, 14, 204, 287, 288, 315, 316.
Wiener, 316.
Wronski, 242, 246 (246).

II.

Accroissement, 82, 83, 98, 197, 206, 211, 222-225, 237, 250; — instantané, 289, note 8, 290, note 14.
Aire d'une courbe plane, 108; dérivée d'une aire, 109; — des sections coniques, 57, (57); — de l'hyperbole équilatère, (61), 131, 288 p. 197.
Algèbre, 12.
Analyse 12, — infinitésimale, 12, — élémentaire, 13.
Arc sin x, arc cos x, 79, 81, 148, 270.
Arg Sh x 79, 81, 146, 270.
Arc tang x, arc cot x, 79, 81, 148, 172, 199, 209, 259.
Arg Th x, Arg Cth x, 79, 81, 146, 259.
Argument (Voir *Imaginaire*).
Axiome de la méthode des limites, 26, 296.
Binôme de Newton, 262-271.
Calcul des variations, 287, p. 194.
— différentiel, 94-105, 132-196, 289, 290.

Digitized by Google

Calcul intégral, 106-116, (106-116), 130, 225, 238, 239-240, 247-248, 254, 256, VII, 259, 267, 270, 311-314, 319.
— numérique des fonctions, 245, 271.
Caractères de convergence, 121, 127-129, (127-129), 303 310, (303-304), 322.
Changement de variables, 190-196
Classification des fonctions, 9-11 (9-11), 76-81, 197.
Conoïdes (d'Archimède), 288, pp. 196, 199.
Concavité, convexité d'une courbe, 269, p. 201.
Constante, 1, 2, 104, 207, 221.
Continuité des fonctions, 84-93, (84), (92), (93), 99, 202, 204, 210; — des séries, 130, 318, 320, IV.
Convergence (voir *Caractères*, *rayon*, *séries*).
Courbe (voir les mots *Aire*, *concavité*, *cubique*, *cycloïde*, *hyperbole*, *point*, *quadrature*, *rayon*, *rectification*, *spirale*, *tangente*).
Cubature, 111, (111).
Cubique, 275, p. 172.
Cycloïde, 191, p. 72.
D, 94, 170, 176; d, 97, 161, 170, 176, 182, (182), 185; Δ, 82, 83, 237; δ, 157, 161, 176, 286; ∂, 157.
Dérivation (voir *Dérivée*); — sous le signe $\int$, 116.
Dérivée, 94, 219, interprétation géométrique, 95, propriétés 100-105, 198-200, 203, 204, 207, 217, 221, 224; — d'une aire, 109; — d'une intégrale, 112, 116; — d'une série, 130, 254, 256, VII, 259, 267, 319, 320; — des diverses espèces de fonctions, 132-160, 162, 239, 289, 290; — d'un déterminant, 156; — d'une fonction interpolaire, 247.
— logarithmique, 139, 141, 142.
Dérivées partielles par rapport à une *lettre* ou par rapport à une *variable*, 157.
Dérivées successives, 170-180.
Déterminant (dérivée ou différentielle d'un —) 156; déterminants fonctionnels, 161-168, 228.
Différences, 237, 243.
Différentielle, 97; propriété, 98; interprétation géométrique 98; — d'une intégrale, 112; — des diverses fonctions, 132-160; — d'un déterminant, 156.
— logarithmique, 139, 141, 142.
Différentielles partielles, totale, 182; — des diverses fonctions de plusieurs variables, 182-184, 187, 189.
— successives, 170, 180, 181, 185, 186, 188, 189; interprétation géométrique, 292, VIII.
Discontinuité (voir *Continuité*).
e, définitions et propriétés, 38, (38), 39, 40.
Ellipsoïde de révolution, 288, p. 196.
Equiconvergente (voir *Série*).
Equicontinue (voir *Fonction*).
Évanouissant, 291, I.
E (ϖ), 7, (7).
Exhaustion (méthode), 288, p. 196, 289, note 9.
Exponentielles, 11, 34, (35), 41, 43, (41-43); imaginaires, 63, 64, 67. 68, 73; dérivées, 133, 138, 144, 146, 171, 173, 289, note 11; propriétés, 201, 217, IV, 236; développement en série, 255.
Fini = *finitus* = déterminé; 290, passim et note 15
Fluxions (méthode ou calcul des), 287, p 194, 290.
Fonction, 5-8; (voir *Accroissement*, *calcul numérique*, *classifications*, *continuité*, *dérivation*, *intégration*, *limite supérieure*, *maxima et minima*, *périodicité*, *représentation*, *variable*).
Fonction(s) abéliennes, 11, 287, p. 195.
— algébrique, 9, 145.

Digitized by Google

Fonction(s) analytiques, (9).
— circulaires, 71 (71), 79, 80, 81, 132. 138, 148, 171. 256, 258. (258), 267, 268.
— composée, 76, 77, 90, 140-144, 151-156, 163. 166, 167, 172-174, 184, 186, 210, 280, p. 200, 290.
— concrète, (9).
— continue sans dérivée déterminée, 96, (96), 315. 316
— croissante, 197, 198, 199, 208, 276.
— de Cauchy, 241.
— décroissante, 197, 198, 208, 276.
— de fonction, 76, 77, 89, 134, (134), 135, 172, 183, 186.
— de Weierstrass, 315, 316.
— directe, 79.
— d'une variable imaginaire, 220-221, 287, p. 195.
— élémentaires, 13, 86-88.
— elliptique 11, 287, p. 195; hyper — ou ultra —, 11.
— entières, 10, 145, 229, 243, 251, IV.
— équicontinue = également ou uniformément continue, 93, (93)
— eulériennes, 287, p. 194.
— explicites, 132-156, 163, 170-175; 182-186; 272-283.
— gamma = seconde eulérienne, 11.
— homogène, 226.
— hyperboliques, 59-62, (59-62, 71, 79, (79), 146, 256.
— impaire, 78, (78), 149, 175.
— implicites, 158, 160, 162, 166 167, 179-181, 187-189, 284-286
— interpolaire, 243, 247.
— inverse, 79, 137, 164, 165.
— irrationnelles, 10, 145.
— monogène, 219.
— multiforme, 81.
— paire, 78, (78), 149, 175.
— périodiques, 80, 149, 175.
— rationnelles, 10, 145.
— simple, 76, 132, 171.
Fonction(s) sphériques, 287, p. 194.
— transcendante, 9, 11, 146, 148.
— uniforme, 81.
Forme algébrique définie, indéfinie, mixte, 282.
Formule (ou théorème) de Moivre (et conséquences), 64, 268; — de Leibniz, 173; — de Taylor, 230 et suiv., 250; — de Maclaurin, 240, 251; — de Newton 243-245, (243), 251; — de Lagrange, 243, — de Gauss, 248, (248).
Fractions rationnelles, 10, 145.
Géométrie analytique, 288, pp. 197, 198.
Hyperbole équilatère (aire de) (61), 131.
Hyperboloïde de révolution, 288, pp. 196, 199.
Imaginaire (module, argument d'une expression) 65, 67, (65), (67), (223 et 232).
Incommensurable (nombre), (28), 293, (293), 294, (294).
Indéfiniment petit, (45), 46, (56), 291, 292, (292).
Infini, 16; 19, (295); 26, (296), 96, II, III, (100); 115, 117, (288, I).
Indivisibles (méthode des —) 288, 291, 292, (292), passim.
Infiniment petit, 45-56, (47-56), 311-312.
Infiniment petits nuls, (56), 291, 292, XII, XIII.
Intégrale (voir *Calcul intégral*); — définie, indéfinie, 114 — double, triple (114).
Intégration d'une somme (par décomposition) 114; — par parties, (114); — par substitution, (114); — des séries, 130, 254, 256, VII, 259, 267, 270, 319.
Interprétation géométrique de la dérivée, 95, de la différentielle, 98, 292, VIII, des théorèmes de Rolle, 105, 205, de Lagrange, 206, de Cauchy, 213. Autre —, (280).

Digitized by Google

Inventeurs de l'analyse infinitésimale, 14, 287, 288.

Limite finie 17-18, 295; infinie, indéterminée, 19, 295; d'une constante, 19, 299; méthode des limites, 16-29, 291-302, (18-29); — d'une somme 30-32, (30), des autres fonctions algébriques élémentaires, 33 (33); — des fonctions transcendantes élémentaires, 34, (34), (35); — de (sin x : x) pour $x = 0$, 37; de $(1 + m^{-1})^m$ pour $m = \infty$, 38-40, (38); — de $[(e^z - 1) : z]$ pour $z = 0$, 73.

Limite de rapport ou de somme d'infiniment petits, 51-56, 106-111, 311-314; double, triple, 111, (111).

Limite supérieure et limite inférieure d'une fonction, 204, 317.

Logarithmes népériens 38, — de Neper (38), 288 p. 196; — naturels (41-43) 43; — hyperboliques, 44; — imaginaires, 69, 70; dérivée (différentielle) des —, 132, 136, 137, 146, 171; développement en série 199, 201, 209, 257, 258, (258); calcul pratique des — 245, 261.

Log 2, 209, 258.

Loi suprême, 242, 246, (246), 248.

Maxima et minima, 4, (4), 272-286, (280), 288, pp. 198-199, 289, p. 200; semi —, 273, 278; — relatifs 285.

Méthode des limites, 28, 287, p. 194, 302; infinitésimale, 56, (56), 287, p. 194, 291; des parties proportionnelles, 245; des indéfiniment petits, des indivisibles, des fluxions, d'exhaustion, des maxima et minima, des multiplicateurs (voir ces mots); des coefficients indéterminés, 288; des tangentes (Descartes, Roberval, Sluse, Fermat, Barrow, Leibniz), 288, (288), 289; des lieux géométriques (Sluse), 288.

Module d'un système de logarithmes, 43; d'une expression imaginaire, 65, 66, (65), (67).

Moment statique d'un volume, 111; moment (sens de Newton), 290.

Multiplicateurs (méthode des), 286.

Notation des constantes, 2; des variables, 2; des fonctions simples, des fonctions de fonction, des fonctions composées, 77; d'un accroissement, 82; des dérivées 94, 157, 170, 176; des différentielles, 96, 170, 182, (182), 185; des intégrales, 114, 115, (114); des séries, 117; des fonctions hyperboliques, 59, 79, (79), 146, 4°, p. 43; des déterminants fonctionnels, 161.

Ordre d'un infiniment petit, 47-50, (47).

Oscillation d'une variable, 21; d'une fonction 93, (93).

Paraboloïde, 286, p. 192, 288, pp. 196, 199.

Paramètres différentiels, 196.

Passage à la limite, 27, 302.

Périodicité des fonctions, 68, 80.

π, 29, IV, (29, IV), 209, 258, 318, p. 253.

Point d'inflexion, 275, 276, 289, p. 201; de rebroussement, 275.

Polygone à échelons, 106, 288, p. 197.

Polynômes X_n de Legendre, 248, p. 130.

Précurseurs de Leibniz et de Newton, 288, (288), (292).

Principe(s) de la méthode des limites 22-26, 296-301; — fondamental sur les infiniment petits, 51-55, 291, 292, passim, 311-312; — de l'interversion des dérivations, 177-178.

Produit équidifférent, 243.

Pseudo-infiniment petits, 291-292.

Pseudo-puissance, 243.

Puissances, 94, 143, 171, 237, 245.

Quadrature des aires planes et courbes, 109, 287, 288, 314.

Rayon de courbure 191, p. 72; — du cercle de convergence des séries, 320.

Digitized by Google

Rectification des courbes, 288, 313.
Réfraction, 289, VIII.
Règle de l'Hospital, 200, 215, 217, 218; — de fausse position double, 245.
Représentation géométrique des variables 3; des fonctions 7; des imaginaires, 66; de la dérivée, 95; de la différentielle, 98, 292, VIII.
Reste d'une série, 126; des formules de Taylor et de Maclaurin, 230-235, 238, 240; de celle de Newton, 244 et de la loi suprême, 242, 246.
Semi-convergente (voir *Série*).
Semi-maxima (ou minima), 273, 278.
Série, 117, convergente, divergente, indéterminée 117; équiconvergente. 317, 318, 319; absolument convergente ou semi-convergente, (121); imaginaire, 122, (122); ascendante ou descendante, 320. Terme général d'une —, 117, 123, (123). Addition des — s, 119, 120, (120), multiplication des — s, 321; interversion des termes, 124, 125, (124), (125); — de Maclaurin, 252; — de Taylor 255 (Voir les mots *Continuité, caractères, dérivation, intégration, reste*).
Série harmonique, 29, II, (29, II), (129).
Sphéroïde, 288, p. 196.
Spirales d'Archimède et de Pappus, 288.
Substitution des infiniment petits (principe de) 51-56, 291, 292, (292), 311-314.
Tangente aux courbes, 95, 98, 276, p. 174, 288, 289; aux coniques, 58, (58 (Voir *Méthode*).
Théorème d'Abel sur la continuité des séries ascendantes, 320; d'Abel, 322, et de Raabe (128), sur la convergence des séries; de Riemann, sur les séries, 125 (125); de Cauchy, de Martens et d'Abel sur la multiplication des séries, 321; de Cauchy, 92, de Thomae, 93, de Weierstrass, 204, sur les fonctions continues; de Guldin, 288, p. 196; de Rolle, 105, 203, 204, 224; de Lagrange, 105, 110, 206, 211, 222-223, 225; de Cauchy, 212, 215; de Rouquet, 200, 217 (Voir *Formule, loi, règle*).
Transformation d'Abel, 321, 322.
Trigonométrie, 12.
Valeur inaccessible, 18, (18), 295.
— la plus grande et la plus petite d'une fonction, 273, 278 (Voir aussi *Limite supérieure, limite inférieure*).
Vraies valeurs des expressions indéterminées, 214-218, 236.
Variable, 1; — indépendante, 5; — dépendante = fonction, 5; — auxiliaire, 6 (Voir *Changement*).
Volume, 111 (111), 288 p. 196.
W (symbole) 227.
Wronskien, 207, 227.

Digitized by Google

PUBLICATIONS DE M. P. MANSION

	Fr. C.
Précis de la Théorie des fonctions hyperboliques. Gand, Hoste, 1884. Brochure in-8° de 32 pages	1 00
Cours de calcul intégral (Première partie) [Calcul des intégrales indéfinies et des intégrales définies. Applications à la recherche des aires planes, des longueurs des lignes courbes, des volumes et des aires des surfaces courbes]. Gand, Hoste, 1883. Un cahier autographié de 60 pages in-4° . fr.	3 00
Cours de calcul intégral (Seconde partie). [Équations différentielles et aux dérivées partielles. Intégrales définies. Calcul des différences Calcul des variations]. Gand, Hoste. Un cahier autographié de 170 pages in-4° (*Rare*).	7 50
Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. Paris, Gauthier-Villars. Gand, Hoste, 1870; 120 p. gr. in-8° .	4 50
Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, Gauthier-Villars, 1875; XVI-289 p. in-8° (*Rare*).	6 00
Cours d'analyse de l'École polytechnique, par M. Ch. Hermite. Première partie. Compte-rendu analytique. Rome, 1873; 80 p. gr. in-8°	2 00
Esquisse de l'histoire du Calcul infinitésimal (Extrait du *Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale* de l'Université de Gand) Brochure de 40 pages in-8°	1 00
Mélanges mathématiques (1874-1882). Gand, Hoste, 1882. Un volume in-8° de 180 pages.	5 00

Introduction à la théorie des déterminants, à l'usage des établissements d'instruction moyenne. Deuxième édition. Brochure de 32 p. in-8°. . .	1 00
Éléments de la théorie des Déterminants, avec de nombreux exercices. Quatrième édition, 1883; 84 p. in-8°.	3 00
Théorie de l'élimination entre deux équations algébriques. Brochure in-8° de 86 p., 1884	3 50
Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig, Teubner, 1886; XXIV-56 pages in-8°.	1 50

TRADUCTIONS.

Notice biographique sur B. Riemann, par E. Schering; 20 p. in-4°, 1870.	1 50
Notice sur les travaux de J. Plücker, par A. Clebsch; 32 p. in-4°, 1872 .	2 00
Notice sur la vie et les travaux de R. F. A. Clebsch, d'après C. Neumann; in-8°, 66 p. in-4°, 1875	2 »
Notice sur les travaux de O. Hesse, par F. Klein; 8 p. in-4°, 1876. . .	0 50

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

RETURN TO▶ Astronomy/Mathematics/Statistics Library
100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 7 DAYS	2	3
4	5	6

DUE AS STAMPED BELOW

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
FORM NO. DD3 BERKELEY, CA 94720

Digitized by Google

U.C. BERKELEY LIBRARIES
C036324478

Digitized by Google